第9卷　第2期　信 息 与 电 子 工 程　Vol.9,No.2
2011年4月　INFORMATION AND ELECTRONIC ENGINEERING　Apr.,2011

文章编号：1672-2892(2011)02-0195-07

基于模态准小波的密频模态参数识别

叶庆卫，赵挺凯，周　宇，王晓东
(宁波大学 信息科学与工程学院，浙江 宁波 315211)

摘　要：基于 Morlet 小波连续变换的模态参数识别算法在故障识别和多模态参数提取中起到了重要作用，然而在密频情况下，Morlet 小波连续变换尺度图上模态极值线相互混叠严重，难以有效分离模态。本文提出一种新型的模态准小波函数，运用连续小波变换理论，推导和证明了模态准小波的连续变换可以有效分离密频模态，并给出了固有频率和阻尼系数的识别公式与整体识别算法。文章针对新型的模态准小波进行了大量的仿真实验，证实了该小波在密频模态分离与参数识别方面的优越性，为密频模态参数提取提供新的思路与手段。

关键词：模态准小波；模态参数识别；密频模态
中图分类号：TN911.7；TP391.4　　**文献标识码**：A

Parameter identification for concentrated modal based on modal quasi-wavelet

YE Qing-wei，ZHAO Ting-kai，ZHOU Yu，WANG Xiao-dong
(Information Science and Engineering College，Ningbo University，Ningbo Zhejiang 315211，China)

Abstract：Modal parameters identification algorithm based on continuous wavelet transformation of the Morlet wavelet is an important algorithm in fault diagnosis and multi-modal parameters identification area. However, on the time-scale image of wavelet continuous transformation of the Morlet wavelet, there will appear aliasing phenomenon between two modals while vibration modals are concentrated, and it is hard to separate these concentrated modals. A new wavelet function called modal quasi-wavelet is proposed in this paper. The continuous transformation of modal quasi-wavelet can split two concentrated modals effectively. And the new algorithm of modal parameters identification is put forward. Numerous experiments of the new algorithm indicate that the modal quasi-wavelet shows better performance than Morlet wavelet. The proposed method provides a new approach for concentrated modal parameters identification.

Key words：modal quasi-wavelet；modal parameter identification；concentrated modals

振动检测技术是各类大型结构安全检测中的重要技术之一，对大型结构的安全生产起到重要作用，广泛应用在旋转机械、桥梁、轨道等各种与人们生活密切相关的大型设备与建筑物的安全检测中。模态分解及其参数识别是振动检测技术的核心算法，在振动检测工程中起到关键的作用，通过振动信号的模态参数提取、模态特征处理以及模态参数识别等手段获得结构的安全质量状态[1-4]。振动模态是弹性结构固有的、整体的特性，每一个模态具有特定的固有频率、阻尼比和模态振型等模态参数。结构的模态参数可以反映结构的健康状况，如果结构发生损伤，就会引起结构模态参数的变化，因此通过识别结构的模态参数可以预测和诊断系统的结构健康状况。近几十年来，模态参数识别技术无论在时域还是在频域都得到了较大的发展，建立了比较完善的识别理论体系。但是，传统的识别方法只限于在时域或在频域中单独进行识别，而不能在时频域同时进行识别，因此识别准确度的提高受到了限制[5-8]。

小波分析是一种信号的时频分析方法，具有多分辨率分析的特点，而且在时频两域都具有表征信号局部特征的能力[9-15]。小波变换使信号的信息在时频面上局部化，在高频域用较短的窗口，在低频域用较长的窗口，能够更好地检测非稳态信号的特征。基于小波变换的模态参数识别方法是当前模态参数识别技术研究的热点之一，国外文献[16-19]以及国内文献[13-14,20-22]都介绍了基于小波变换的模态参数识别方法，取得了良好的效果。但是，对于密频模态下的参数识别，没有给出有效的解决方法，因为 Morlet 小波变换难以分离密频模态，使得从时间

收稿日期：2010-07-06；**修回日期**：2010-10-12
基金项目：浙江省教育厅基金资助项目(Y200908502)；国家自然科学基金资助项目(61071198)

尺度图中模极大值位置提取的误差很大，导致模态主频、模态阻尼系数等模态参数的提取准确度不高。

本文提出了一种基于模态函数的新型小波函数–模态准小波函数，并构建了一种基于模态准小波连续变换方法的有效的模态参数识别算法。

1 新小波的提出及单模态参数识别

一般粘性阻尼系统下的自由振动响应函数形式如下[2]：

$$x(t)=\sum_{k=1}^{N}a_k\mathrm{e}^{-\lambda_k t}\cos(\omega_k t+\phi_k) \tag{1}$$

从式(1)中考虑单个模态下的复函数，提出一种新的小波函数—模态准小波，其表达式如下：

$$\psi(t)=\mathrm{e}^{-w_a|t|}\mathrm{e}^{\mathrm{j}w_b t} \tag{2}$$

式中：w_a 为正常数；w_b 为小波的中心频率。

由式(3)可证得该 $\psi(t)$ 是一个平方可积的函数，即具有有限的能量：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi(t)|^2\mathrm{d}t=\frac{w_a}{{w_a}^2+{w_b}^2}<\infty \tag{3}$$

该准小波函数的傅里叶变换为：

$$\hat{\psi}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-w_a|t|}\mathrm{e}^{\mathrm{j}w_b t}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=\frac{2w_a}{{w_a}^2+(w_b-\omega)^2} \tag{4}$$

由式(4)得：$\hat{\psi}(0)=\dfrac{2w_a}{{w_a}^2+{w_b}^2}\neq 0$。该函数 $\psi(t)$ 要成为基本小波，就必须满足小波允许性条件：

$$0<C_\psi=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|}\mathrm{d}\omega<\infty \tag{5}$$

当 $\omega\to 0$ 时，$\dfrac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|}\to+\infty$，可得积分 $C_\psi\to+\infty$，故该模态准小波函数 $\psi(t)$ 不满足小波允许性条件。

因此模态准小波连续变换不存在逆变换，只能用于信号的特征提取，而无法用于信号压缩、去噪和复原等处理。本文中运用模态准小波连续变换来进行振动信号的模态参数识别，构建多模态参数识别算法。

由模态准小波的傅里叶变换公式(3)看出，模态准小波函数的模极大值在尺度参数 $a={w_b}/{\omega}$ 处取得，其中 ω 为分析信号 $x(t)$ 的固有频率。在模极大值情况下，信号 $x(t)$ 的特性与该尺度下的小波函数的特性最相似，此时模态准小波变换的模 $W_\psi(a,b)$ 取得极大值。

考虑一个粘性阻尼单自由度系统的自由振动响应：

$$x(t)=A_0\mathrm{e}^{-\zeta\omega_n t}\cos(\omega_d t+\phi_0) \tag{6}$$

式中：A_0 为初始幅度；ϕ_0 为初始相位；ω_n 为无阻尼固有频率；$\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ 为阻尼固有频率；ζ 为阻尼率。

信号 $x(t)$ 的解析信号为：

$$z(t)=x(t)+\mathrm{j}H[x(t)]=A_0\mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_d t+\phi_0)} \tag{7}$$

式中：$H[x(t)]$ 为信号 $x(t)$ 的 Hilbert 变换，衰减系数 $\lambda=\xi\omega_n$。

假设信号 $x(t)$ 的时间范围为 $0\sim T$，并进行离散化，令：$t_k=k\Delta t$，$k=0,1,\cdots,N$，$b=n_1\Delta t$，$T=N\Delta t$，且 $\Delta t\ll 1,\ \lambda T\gg 1$，则复信号 $z(t)$ 对应的小波变换可以表示为：

$$\begin{aligned}W_\psi(a,b)&=\langle x(t),\psi_{a,b}(t)\rangle=\frac{1}{2}\int_0^T z(t)\psi_{a,b}^*(t)\mathrm{d}t=\frac{A_0}{2\sqrt{a}}\int_0^T\mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_d t+\phi_0)}\mathrm{e}^{-w_a\frac{|t-b|}{a}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}w_b\frac{t-b}{a}}\mathrm{d}t=\\&\frac{A_0}{2\sqrt{a}}\Delta t\left(\mathrm{e}^{-\lambda_a b+\mathrm{j}(\lambda_b b+\phi_0)}\sum_{k=0}^{n_1-1}\mathrm{e}^{uk\Delta t}+\mathrm{e}^{\lambda_a b+\mathrm{j}(\lambda_b b+\phi_0)}\sum_{k=n_1}^{N}\mathrm{e}^{vk\Delta t}\right)=\frac{A_0}{2\sqrt{a}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\lambda_b b+\phi_0)}\left(\frac{\mathrm{e}^{-\lambda_a b}-\mathrm{e}^{-\lambda b+\mathrm{j}\Delta\omega b}}{\lambda-\lambda_a-\mathrm{j}\Delta\omega}+\frac{\mathrm{e}^{-\lambda b+\mathrm{j}\Delta\omega b}}{\lambda+\lambda_a-\mathrm{j}\Delta\omega}\right)\end{aligned} \tag{8}$$

式中：$\lambda_a=\dfrac{w_a}{a}$；$\lambda_b=\dfrac{w_b}{a}$；$u=-\lambda+\lambda_a+\mathrm{j}\Delta\omega$；$v=-\lambda-\lambda_a+\mathrm{j}\Delta\omega$；$\Delta\omega=\omega_d-\lambda_b$。

现在考虑 $a\approx a_0=w_b/\omega_d$ 附近的连续变换结果，此时有 $\Delta\omega=\omega_d-\lambda_b\to 0$，并且设 $w_a\ll 1$，那么有 $\lambda_a\ll 1,\ \lambda_a\ll\lambda$，代入式(8)，得：

$$W_\psi(a,b)=\frac{A_0}{2\sqrt{a}}\mathrm{e}^{-\lambda_a b+\mathrm{j}(\lambda_b b+\phi_0)}\frac{\lambda+\mathrm{j}\Delta\omega}{\lambda^2+\Delta\omega^2}\quad (a\approx a_0,\ w_a\ll 1) \tag{9}$$

当 $\Delta\omega=\omega_d-\lambda_b=0$ 时取极大值，所以可以根据时间–尺度图上的模极大值确定模态主频，在极大值 $a_0=w_b/\omega_d$ 处，式(9)变为：

$$W_\psi(a_0,b)=\frac{A_0}{2\sqrt{a}}\frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda_a b}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\lambda_b b+\phi_0)}\Rightarrow \mathrm{Arg}\left[W_\psi(a_0,b)\right]=\lambda_b b+\phi_0=\omega_d b+\phi_0 \tag{10}$$

式中：$\lambda_a=\dfrac{w_a}{a_0};\lambda_b=\dfrac{w_b}{a_0}=\omega_d$。式(10)表明 ω_d 可以在小波变换尺度图模极大处 $a\approx a_0$ 时对应的相位曲线进行直线拟合，该直线的斜率就是 ω_d。由此可以识别出单自由度下的阻尼固有频率值。

下面讨论阻尼系数的识别。在 $w_a\ll 1$ 时，由式(10)可以获得固有阻尼频率，从而获得对应的 a_0。然后假定 $\lambda_a=\dfrac{w_a}{a_0}\gg 1,\ \lambda_a\gg\lambda$，代入式(8)，并令 $a=a_0$，得：

$$\left|W_\psi(a_0,b)\right|=\frac{A_0}{2\sqrt{a_0}}\left|\frac{\mathrm{e}^{-\lambda_a b}-\mathrm{e}^{-\lambda b}}{\lambda-\lambda_a}+\frac{\mathrm{e}^{-\lambda b}}{\lambda+\lambda_a}\right|\approx\lambda_a B\mathrm{e}^{-\lambda b}\ (\lambda_a\gg\lambda\Rightarrow \mathrm{e}^{-\lambda_a b}\ll \mathrm{e}^{-\lambda b}) \tag{11}$$

式中 $B=\dfrac{A_0}{\sqrt{a_0}(\lambda_a^2-\lambda^2)}$，则拟合表达式为：

$$\ln\left|W_\psi(a_0,b)\right|=-\lambda b+\ln(\lambda_a B)\Rightarrow\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b}(-\ln\left|W_\psi(a_0,b)\right|)=\lambda \tag{12}$$

因此在已知尺度参数 a_0 和 $\lambda_a=\dfrac{w_a}{a_0}\gg 1$ 的条件下，可由式(12)和式 $\xi=\lambda/\omega_n$ 识别出单自由度下的阻尼系数值。

2 多模态参数识别原理

基于小波变换的线性性质，上述的频率和阻尼系数的估计过程可以扩展到多自由度系统中。考虑多自由度系统下一个具有 M 个模态的自由振动响应信号：

$$x(t)=\sum_{i=1}^{M}A_i\mathrm{e}^{-\zeta_i\omega_{ni}t}\cos(\omega_{di}t+\phi_i) \tag{13}$$

式中：$A_i,\zeta_i,\omega_{ni},\omega_{di}$ 和 ϕ_i 分别为系统第 i 阶模态的初始幅度、阻尼率、无阻尼固有频率、阻尼固有频率和初始相位，其中满足 $\omega_{di}=\omega_{ni}\sqrt{1-\zeta_i^2}$。

运用模态准小波函数将式(12)对应的多模态信号进行准小波变换后得到小波系数 $W_\psi(a_k,b)$（$k=1,2,\cdots,N$，N 为小波分解的尺度数目），由小波变换的线性性质可得：

$$W_\psi(a_k,b)=\sum_{i=1}^{M}\frac{A_i}{2\sqrt{a_k}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\lambda_{bk}b+\phi_i)}\left(\frac{\mathrm{e}^{-\lambda_{ak}b}-\mathrm{e}^{-\lambda_i b+\mathrm{j}\Delta\omega_k b}}{\lambda_i-\lambda_{ak}-\mathrm{j}\Delta\omega_k}+\frac{\mathrm{e}^{-\lambda_i b+\mathrm{j}\Delta\omega_k b}}{\lambda_i+\lambda_{ak}-\mathrm{j}\Delta\omega_k}\right) \tag{14}$$

式中：$\lambda_{ak}=\dfrac{w_a}{a_k};\ \lambda_{bk}=\dfrac{w_b}{a_k};\ \Delta\omega_k=\omega_{di}-\lambda_{bk}$。在每个特定的 $i=k$ 且 $\Delta\omega_i=\omega_{di}-\lambda_{bi}=0$ 处，也就是 $a_i=\dfrac{w_b}{\omega_{di}}$ 处，$\left|\psi(a_i\omega_{di})\right|$ 达到最大化，小波函数取得模极大值，此时仅仅与 a_i 对应的模态也就是第 i 阶模态在小波变换中贡献最大，其他模态的贡献很小，可以忽略。因此可得每个分离模态（$i=1,2,\cdots,M$）所对应的小波系数为：

$$W_\psi(a_i,b)=\frac{A_i}{2\sqrt{a_i}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\lambda_{bi}b+\phi_i)}\left(\frac{\mathrm{e}^{-\lambda_{ai}b}-\mathrm{e}^{-\lambda_i b+\mathrm{j}\Delta\omega_i b}}{\lambda_i-\lambda_{ai}-\mathrm{j}\Delta\omega_i}+\frac{\mathrm{e}^{-\lambda_i b+\mathrm{j}\Delta\omega_i b}}{\lambda_i+\lambda_{ai}-\mathrm{j}\Delta\omega_i}\right)=\frac{A_i}{2\sqrt{a_i}\cdot\lambda_i}\mathrm{e}^{-\lambda_{ai}b}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\lambda_{bi}b+\phi_i)},\ \left(w_a=1\right) \tag{15}$$

式中：$\lambda_{ai}=\dfrac{w_a}{a_i};\ \lambda_{bi}=\dfrac{w_b}{a_i};\ \Delta\omega_i=\omega_{di}-\lambda_{bi}$。当 $\Delta\omega_i=\omega_{di}-\lambda_{bi}=0$ 时取极大值，所以可以根据时间尺度图上的模极大值确定模态主频，并且 w_a 越小，近似关系式越精确，且极大值越大。w_a 控制了尺度图上模态极值线的粗细，w_a 越小，模态越容易分离。因此在密频模态下需要选择很小的 w_a 来分离模态以获得每个模态对应的尺度参数值。

与式(10)类似，根据尺度图寻找出第 i 个模态对应的模极大位置 a_i，那么模态固有频率 ω_{di} 由下式拟合获得：

$$W_\psi(a_i,b)=\frac{A_0}{2\sqrt{a_i}}\frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda_{ai}b}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\lambda_{bi}b+\phi_i)}\Rightarrow\mathrm{Arg}\left[W_\psi(a_i,b)\right]=\lambda_{bi}b+\phi_i \tag{16}$$

同理，获得了 a_i 和 ω_{di} 之后，再令 $a=a_i$ 且 $w_a \gg 1$，代入式(15)，得：

$$\left|W_{\psi}(a_i,b)\right|=\frac{A_i}{2\sqrt{a_i}}\left|\frac{\mathrm{e}^{-\lambda_{ai}b}-\mathrm{e}^{-\lambda_i b}}{\lambda_i-\lambda_{ai}}+\frac{\mathrm{e}^{-\lambda_i b}}{\lambda_i+\lambda_{ai}}\right|=\frac{A_i}{2\sqrt{a_i}\,(\lambda_{ai}^2-\lambda_i^2)}\left|(\lambda_{ai}+\lambda_i)\mathrm{e}^{-\lambda_{ai}b}-2\lambda_{ai}\mathrm{e}^{-\lambda_i b}\right|= \\ \lambda_{ai}B_i e^{-\lambda_i b},\ (w_a \gg 1,\lambda_{ai} \gg \lambda_i \Rightarrow \mathrm{e}^{-\lambda_{ai}b} \ll \mathrm{e}^{-\lambda_i b}) \tag{17}$$

式中 $B_i=\dfrac{A_i}{\sqrt{a_i}\,(\lambda_{ai}^2-\lambda_i^{\,2})}$，则拟合表达式为：

$$\ln\left|W_{\psi}(a_i,b)\right|=-\lambda_i b+\ln(\lambda_{ai}B_i) \tag{18}$$

每个相应的模态进行直线拟合得到的斜率即为对应模态的衰减系数值，再根据式 $\xi_i=\dfrac{\lambda_i}{\omega_{ni}}$ 可识别出每个模态对应的阻尼系数值。

3 多模态参数识别仿真实验

为了验证本文基于模态准小波函数的多模态参数识别方法的有效性，对一个二自由度粘性阻尼系统进行仿真实验，系统的自由响应函数如下：

$$x(t)=A_1\mathrm{e}^{-\zeta_1\omega_{n1}t}\cos(\omega_{d1}t+\phi_1)+A_2\mathrm{e}^{-\zeta_2\omega_{n2}t}\cos(\omega_{d2}t+\phi_2) \tag{19}$$

系统参数选择：$A_1=1.5$，$A_2=1.2$，$f_{d1}=20\ \mathrm{Hz}$，$\omega_{d1}=2\pi f_{d1}=125.663\,7\ \mathrm{rad/s}$，$f_{d2}=15\ \mathrm{Hz}$，$\omega_{d2}=2\pi f_{d2}=93.821\,3\ \mathrm{rad/s}$，$\zeta_1=0.01$，$\zeta_2=0.015$，$\phi_1=0.2$，$\phi_2=0.3$，则 $\omega_{n1}=125.67\ \mathrm{rad/s}$，$\omega_{n2}=94.258\,4\ \mathrm{rad/s}$，其中 f_{d1} 对应的为主模态，f_{d2} 对应的为次模态。时间 t 的取值为 0 s~5 s，抽样 1 024 个点。该系统的自由时间响应由图 1 给出。

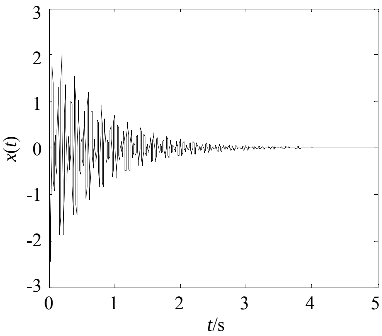


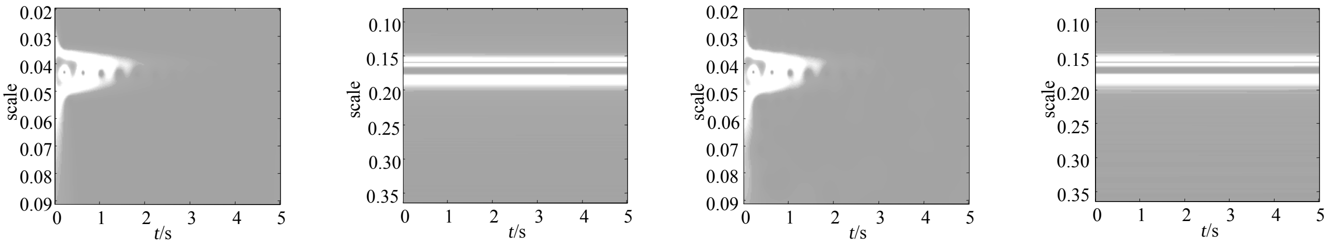
Fig.1 Time-domain curve of free response
图 1 自由响应时域曲线

对于模态准小波函数，w_a 是一个非常重要的参数，w_a 取的值越小将使频率分辨率越大，而为了分离密频模态，需要有较大的频率分辨率，故需要取很小的 w_a 值。另外，w_b 的值一方面决定了时间–尺度上模极大值所在的位置；另一方面决定每一条模态值线的粗细，一般 w_b 值越大，模极大值线越细，有利于密频模态的分离。故这里模态准小波函数的参数设置为 $w_a=0.001$，$w_b=20$。

文献[13]中提出了一种改进的复 Morlet 小波函数，取得了较好的模态分离效果，形式如下：

$$\psi(t)=\mathrm{e}^{-t^2/N}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t} \tag{20}$$

本文中将模态准小波连续变换的模态分离性能，与改进 Morlet 小波的小波变换方法进行对比。Morlet 小波的取值参照文献[13]，$N=17$，$\omega_0=5$；模态准小波函数的参数设置仍然为 $w_a=0.001$，$w_b=20$。同时为使 $x(t)$ 为密频模态下的信号，将次模态频率 f_{d2} 设为 17.5 Hz，此时模态频率间隔为 2.5 Hz。运用 2 种小波分别对信号 $x(t)$ 进行连续小波变换，并在无噪声和有一定噪声的情况下进行测试比较。图 2 分别给出了在无噪声和加入信噪比为 20 dB 高斯噪声的情况下，模态准小波变换与 Morlet 小波变换的模态分离效果对比。



(a) time-scale image for Morlet wavelet under noiseless condition

(b) time-scale image for modal wavelet under noiseless condition

(c) time-scale image for Morlet wavelet under Gaussian noise

(d) time-scale image for modal wavelet under Gaussian noise

Fig.2 Contrast images of modal separation effects
图 2 模态分离效果对比

从图 2(b)无噪声模态准小波尺度图中可以非常清晰地观察到 2 个模态，从而能够得到精确的尺度参数的值，而图 2(a)无噪声 Morlet 小波尺度图中虽然能观察到 2 个模态，但模态间有重叠，并且模极大值所在位置的条纹比较宽，这样得到的尺度参数值就不够精确，从而无法得到精确的模态阶数。再比较图 2(c)和图 2(d)，可以明显

观察到模态准小波在有噪声的情况下，依然能够有效地分离模态，受噪声影响很小。由此可以看出，通过设置恰当的参数，模态准小波能够非常有效地分离密集模态，从而精确得到模极大值所在的尺度参数值，并具有较强的抗噪声性能。

为了证明基于模态准小波的参数识别方法的可行性和精确性,分别在不同模态主频间隔下和不同的噪声强度下，进行模态参数识别仿真测试，以检验本算法的有效性。模态参数的识别衡量指标定义为：

$$R0=\frac{|testvalue-theoryvalue|}{theoryvalue}\times 100\% \tag{21}$$

从式(21)中可以看出，若测出的参数值与理论值越接近，则相对误差越小，说明识别的参数准确度越高。

对于振动信号 $x(t)$ ，在以下 2 种情况下，运用模态准小波连续变换方法进行参数识别测试：1) 信号 $x(t)$ 在固有频率 $f_{d1}=20\,\text{Hz}$ 固定不变条件下，f_{d2} 变化使得 2 个模态频率的间隔由 8 Hz 以 0.5 Hz 为步长均匀减小到 0.5 Hz；2) 信号 $x(t)$ 和模态准小波的参数保持不变，加入不同强度的高斯白噪声，信噪比强度由 100 dB 以 5 dB 为间隔均匀变化到 25 dB。

这里在阻尼系数识别时，模态准小波的参数 w_a 应该取较大值 10，得到较大的时间分辨率， w_b 的值同上。图 3 显示了不同模态频率间隔下的阻尼比识别误差曲线图，图 4 显示了不同信噪比强度下的阻尼比识别误差曲线图。

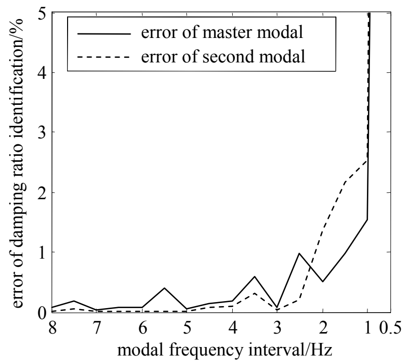


Fig.3 Curve of damping ratio identification under different frequency intervals

图 3 不同模态频率间隔下的阻尼比识别误差曲线图

由于在不同模态主频间隔下，固有频率的识别结果误差很小且误差值基本一致，没有画出其曲线，识别出主模态的固有频率差值的均值为 0.1%左右，次模态固有频率差值的均值为 0.13%。在不同的噪声强度下，固有频率的识别误差也很小，识别出主模态的固有频率差值的均值为 0.1%，次模态固有频率差值的均值为 0.25%。表明本文的方法能够精确地识别出固有频率，受噪声和模态间隔的影响很小。

从图 3 可以看到，随着模态主频间隔的减小，阻尼比的识别误差增大。当模态主频间隔大于 3 Hz 时，误差值很小，识别结果很精确；当模态间隔为 3 Hz 到 1 Hz 时，误差值在 5%以下，识别结果也较精确；当间隔小于 1 Hz 时，误差值较大，最大分辨率可以达到 1 Hz,故文章的模态准小波能够有效识别模态间隔为 1 Hz 以上的密频模态。从图 4 可以看到，阻尼比的识别误差随着噪声强度的增加而增大，当信噪比大于 40 dB 时，识别误差小于 1%，识别结果很精确；当信噪比在 40 dB 至 25 dB 范围时，误差有所增大，但依然能够接受，当信噪比小于 25 dB 时识别结果无效了。由此可以看出，本文的模态准小波变换方法在较大噪声情况下，依然能够较精确地识别出阻尼比参数值，具有良好的抗噪声性能。在实际工程中，信噪比的值一般都大于 30 dB，故本文方法能够运用于实际工程。

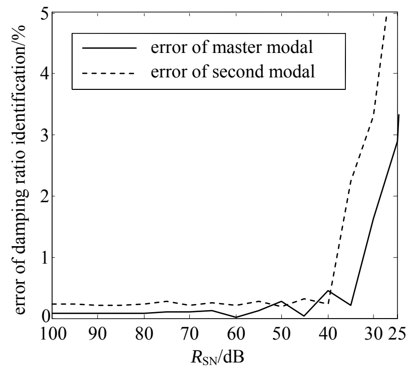


Fig.4 Curve of damping ratio identification under different SNR

图4 不同信噪比强度下的阻尼比识别误差曲线图

4 结论

基于小波变换的模态参数识别方法是模态参数识别技术的重点研究与发展方向之一。针对传统 Morlet 小波函数的不足，文中从模态函数出发，提出了一种新型的小波函数–模态准小波函数，并从理论上推出了固有频率和阻尼系数的识别公式。文中仿真实验表明，对于模态准小波通过取较小的 w_a 值可以在密频模态下获得优良的模态分离效果，而通过增大 w_a 的值可以获得较高准确度的阻尼系数识别结果。在模态分离与阻尼系数识别两方面均有优良表现，并且具有良好的抗噪性，性能优于 Morlet 小波的连续变换效果。

参考文献：

[1] 傅志方,华宏星. 模态分析理论与应用[M]. 上海:上海交通大学出版社, 2000. (FU Zhifang,HUA Hongxing. Mode analysis theory and application[M]. Shanghai:Shanghai Jiaotong University Press, 2000.)

[2] 曹树谦,张文德,萧龙翔. 振动结构模态分析-理论、实验与应用[M]. 天津:天津大学出版社, 2001. (CAO Shuqian, ZHANG Wende,XIAO Longxiang. Vibration-structure mode analysis-theory, experimentation and application[M]. Tianjin:Tianjin University Press, 2001.)

[3] 续秀忠,华宏星,陈兆能. 基于环境激励的模态参数辨识方法综述[J]. 振动与冲击, 2002,21(3):1-5. (XU Xiuzhong, HUA Hongxing,CHEN Zaoneng. Review of modal identification method based on ambient excitation[J]. Journal of Vibration and Shock, 2002,21(3):1-5.)

[4] 朱宏平,段雪平. 环境随机激励下斜拉桥的模态分析[J]. 实验力学, 1999,14(2):183-189. (ZHU Hongping,DUAN Xueping. Modal analysis of cable stayed bridge by vibration measurements under ambient excitation[J]. Journal of experiment mechanics, 1999,14(2):183-189.)

[5] 刘利军,樊江玲,张志谊,等. 密频系统模态参数辨识及其振动控制的研究进展[J]. 振动与冲击, 2007,26(4):109-115. (LIU Lijun,FAN Jiangling,ZHANG Zhiyi,et al. Study progresses in modal parameters identification and vibration control of systems with crowded modes[J]. Journal of Vibration and Shock, 2007,26(4):109-115.)

[6] 刘进明,应怀樵,沈松,等. 时域模态分析方法的研究及软件研发[J]. 振动工程学报, 2004,17(5):739-744. (LIU Jinming,YING Huaijiao,SHEN Song,et al. Method research and software developing of time domain modal analysis[J]. Journal of Vibration and Shock, 2004,17(5):739-744.)

[7] 续秀忠. 结构模态参数辨识的时频分析方法[J]. 噪声与振动控制, 2002,22(5):327. (XU Xiuzhong,HUA Hongxing, CHEN Zhaoneng. Modal parameters identification using time-frequency analysis methods[J]. Noise and Vibration Control, 2002,22(5):327.)

[8] 徐佩霞,孙功宪. 小波分析与应用实例[M]. 合肥:中国科学技术出版社, 2001. (XU Peixia,SUN Gongxian. Wavelet analysis and application instance[M]. Hefei:Chinese Science and Technology Press, 2001.)

[9] 徐文明,张梅军,唐建. 小波多分辨率分析在信号奇异性检测中的应用[J]. 解放军理工大学学报:自然科学版, 2002,3(3):57-59. (XU Wenming,ZHANG Meijun,TANG Jian. Application of wavelet multi-scale analysis to singularity detection of signals[J]. Journal of PLA University of Science and Technology:Natural Science, 2002,3(3):57-59.)

[10] 王燕,王海滨,刘立汉. 基于小波变换的心音信号降噪方法[J]. 信息与电子工程, 2010,8(3):303-307. (WANG Yan,WANG Haibin,LIU Lihan. Noise reduction for heart sound based on wavelet transform[J]. Information and Electronic Engineering, 2010,8(3):303-307.)

[11] 刘育田,胥海纶. 基于小波变换模极大值的电能质量奇异性检测[J]. 信息与电子工程, 2009,7(2):123-126. (LIU Yutian,XU Hailun. Power Quality Abnormal Detection Based on Modulus Maximum Value of Wavelet Transform[J]. Information and Electronic Engineering, 2009,7(2):123-126.)

[12] 于开平,邹经湘,杨炳渊. 模态参数识别的小波变换方法[J]. 宇航学报, 1999,(4):72-76. (YU Kaiping, ZOU Jingxiang, YANG Binyuan. A method of the wavelet transform for modal parameter identification[J]. Journal of Astronautics, 1999,(4):72-76.)

[13] 徐亚兰,陈建军,胡太彬. 系统模态参数辨识的小波变换方法[J]. 西安电子科技大学学报:自然科学版, 2004,31(2): 281-285. (XU Yalan,CHEN Jianjun,HU Taibin. Modal parameters identification using the wavelet transform[J]. Journal of Xidian University, 2004,31(2):281-285.)

[14] 于开平,邹经湘,庞世伟. 结构系统模态参数识别方法研究进展[J]. 世界科技研究与发展, 2005,27(6):22-30. (YU Kaiping,ZOU Jingxiang,PANG Shiwei. Research advance of modal parameter identification method for structural system[J]. World Sci-tech R & D, 2005,27(6):22-30.)

[15] Joseph Lardies,Stéphane Gouttebroze. Identification of modal parameters using the wavelet transform[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2002,44(11):2263-2283.

[16] Slavic J,Simonovski I,Boltezar M. Damping identification using a continuous wavelet transform: application to real data[J]. Journal of Sound and Vibration, 2003,262:291-307.

[17] Kijewski T,Kareem A. Wavelet Transform for System Identification in Civil Engineering[J]. Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering, 2003,18:339-355.

[18] Slavic J,Simonovski I,Boltezar M. Damping identification using a continuous wavelet transform: application to real data[J]. Journal of Sound and Vibration, 2003,262(2):291-307.

[19] 罗光坤,张令弥. 基于 Morlet 小波变换的模态参数识别研究[J]. 振动与冲击, 2007,26(7):135-138. (LUO Guangkun, ZHANG Lingmi. Study on identification of modal parameters based on Morlet wavelet transformation[J]. Journal of Vibration and Shock, 2007,26(7):135-138.)

[20] 柳小勤,岳林,朱如鹏. 连续小波变换应用于密集模态参数识别[J]. 南京航空航天大学学报, 2007,39(4):496-500.

(LIU Xiaoqin,YUE Lin,ZHU Rupeng. Continuous wavelet transform for close modal parameter estimation[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2007,39(4):496–500.)

[21] 伊廷华,李宏男,王国新. 基于小波变换的结构模态参数识别[J]. 振动工程学报, 2006,19(1):51–56. (YI Tinghua,LI Hongnan,WANG Guoxin. Structural modal parameter identification based on wavelet transform[J]. Journal of Vibration and Shock, 2006,19(1):51–56.)

[22] 武晓东,邓忠民. 基于连续小波变换的飞行器结构参数辨识[J]. 北京航空航天大学学报, 2008,34(7):778–781. (WU Xiaodong,DENG Zhongmin. Modal parameters identification for flight vehicle based on the continuous wavelet transforms[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2008,34(7):778–781.)

作者简介:

叶庆卫(1970–)，男，浙江省衢州市人，博士，副教授，主要研究方向为振动信号处理、最优化技术.email:yeqingwei@nbu.edu.cn.

赵挺凯(1986–)，男，浙江省诸暨市人，在读硕士研究生，主要研究方向为振动信号处理、最优化技术.

周　宇(1964–)，男，北京市人，副教授，主要研究方向为振动信号处理、信号传输.

王晓东(1970–)，男，浙江省上虞市人，副教授，主要研究方向为信号传输、最优化技术.

(上接第 194 页)

[7] Wang Haiming,Youl Xiaohu,Bin Jiang,et al. Performance Analysis of Frequency Domain Equalization in SC-FDMA Systems[C]// Proceedings of the IEEE ICC'08. 2008:4342–4347.

[8] Zhang Jianhua,Huang Chen,Liu Guangyi,et al. Comparison of the Link Level Performance between OFDMA and SC-FDMA[C]// First International Conference on Communications and Networking. Beijing:[s.n.], 2006:1–6.

[9] Berardinelli G,Priyanto B E,Sorensen T B,et al. Improving SC-FDMA Performance by Turbo Equalization in UTRA LTE Uplink[C]// Vehicular Technology Conference,2008. Singapore:[s.n.], 2008:2557–2561.

[10] Huang Gillian,Nix Andrew,Armour Simon. Decision Feedback Equalization in SC-FDMA[C]// IEEE 19th International Symposium on Personal,Indoor and Mobile Radio Communications,2008. Cannes:[s.n.], 2008:1–5.

[11] Hoondong Noh,Myyoungseok Kim,Jaesang Ham. A Practical MMSE-ML Detection for a MIMO SC-FDMA System[J]. IEEE communications letters, 2009,13(12):902–904.

[12] Golub G H,Van Loan C F. Matrix Computations[M]. Beijing:Science Press, 2001.

[13] Nisar M D,Nottensteiner H,Hindelang T. On Performance Limits of DFT Spread OFDM Systems[C]// Mobile and Wireless Communications Summit,2007. Budapest:[s.n.], 2007:1–4.

[14] 3GPP TS 36.101 V8.2.0. User Equipment(UE) radio transmission and reception[S]. 2008.

作者简介:

倪　俊(1985–)，男，上海市人，在读硕士研究生，主要从事无线通信物理层的信号处理的研究.email:ni.jun.fudan@gmail.com.

杨　涛(1970–)，男，陕西省汉中市人，副教授，主要从事宽带无线通信理论及信号处理研究.

胡　波(1968–)，男，江苏省常州市人，教授，博士生导师，主要从事数字信号处理、数字通信等方面的研究.