

文章编号: 1672-2892(2011)02-0206-05

## 一种旋转因子访存优化的 FFT 算法

王非非, 杜伟韬

(中国传媒大学 广播电视数字化教育部工程研究中心, 北京 100024)

**摘要:** 为了在嵌入式设备中高效运行快速傅里叶变换算法, 提出了一种针对小尺寸高速缓冲存储器优化的旋转因子的生成与访存策略, 该方法能够有效提高缓存命中率及运算速率。给出了不同需求下配置参数的选取原则, 基于典型算法配置参数和目标处理器平台进行算法测试。实验结果证明, 优化后的方法在信噪比性能下降较小的情况下能够获有效地提升计算速率。

**关键词:** 嵌入式; 快速傅里叶变换; 旋转因子; 泰勒插值; 高速缓冲存储器

**中图分类号:** TN911

**文献标识码:** A

## Optimized design of memory access for twiddle factors in FFT algorithm

WANG Fei-fei, DU Wei-tao

(Digital Engineering Center, Communication University of China, Beijing 100024, China)

**Abstract:** In order to run Fast Fourier Transform(FFT) algorithm more efficiently in embedded devices, an optimized design of twiddle factors for the small Cache was presented. The design can effectively enhance read-percent cache hits and improve processing speed. The selection principle of configuration parameters in different needs was given and the experimental results based on typical configuration parameters and target processor were discussed. It is proved that this optimized method can effectively improve processing speed with slight Signal to Noise Ratio(SNR) decrease.

**Key words:** embedded; Fast Fourier Transform; twiddle factor; Taylor interpolation; Cache

快速傅里叶变换(FFT)算法是数字信号处理领域应用最为广泛的算法之一, 在频谱分析、卷积运算和滤波器等领域占有重要地位。随着嵌入式软硬件技术的发展以及对设备功能需求的日益多样化, 运行于其中的信号处理算法的复杂程度与规模也随之增长。较通用主机平台而言, 嵌入式设备的系统资源仍有较大局限, 故而针对系统结构优化已有的信号处理算法具有较高的研究与应用价值。在通过对处理器进行编程来实现 FFT 算法时, 需将旋转因子与输入数据进行多级蝶形计算从而得到最终结果。现代处理器的计算性能很大程度上受制于缓存命中率和流水线填充程度<sup>[1]</sup>。因此除去乘加运算总量之外, 在资源受限的嵌入式处理器上实现算法时, 算法内部缓存的数据规模、访存规律及相应的处理器缓存命中率均会对算法代码的实际运行的时间性能造成较大影响。在运行较大点数 FFT 时, 对于高速缓冲存储器(Cache)规模较小的处理器, 传统的全查表法生成旋转因子的策略, 会增加处理器缓存的换页次数, 导致其命中率降低, 从而使处理性能明显下降。对此的改善方法是, 对旋转因子的存储容量进行压缩。常用的方法有使用 CORDIC 算法<sup>[2]</sup>动态计算生成旋转因子和存储去除对称性冗余的旋转因子<sup>[3]</sup>这 2 种方法。但以上 2 种方法都存在局限性, 前者的精确度有限, 并且由于其引入大量加法移位运算来节省存储空间, 使得计算速度成为算法性能的瓶颈; 而对称冗余去除法尽管不消耗计算资源, 但最多只能将旋转因子表压缩为全查表法的 1/8, 在计算大点数 FFT 时对缓存命中率的提高仍然有限。本文根据旋转因子的访存比率统计情况, 提出了一种旋转因子访存优化算法。该方法能够根据计算精确度需求, 针对目标处理器结构灵活配置算法参数, 调节资源开销且有效提高 FFT 计算速度。该方法仅存储使用比率较高的旋转因子, 对其他旋转因子则采用泰勒插值的计算生成, 从而有效节省存储空间, 提高处理器缓存命中率, 并且保持较高精确度。此外本方法对于不同点数 FFT 需要固化的旋转因子表内容一致, 该特性使得在使用本方法计算不同点数 FFT 时可以直接切换, 无需进行旋转因子表的重新计算, 从而有效提高上层程序的模式切换速度。

收稿日期: 2010-09-20; 修回日期: 2010-10-27

基金项目: 教育部科技重点基金资助项目(108022)

### 1 旋转因子存储优化

文献[4]中提出了一种利用泰勒插值进行只读内存(Read Only Memory, ROM)压缩的方法,在以极少的频谱纯度损失为代价的前提下能够有效降低电路面积和功率消耗。对于嵌入式处理器,压缩 ROM 有利于提高缓存命中率,将这种方法用于旋转因子的压缩同样可以获得理想的效果。设计所用到的参数见表 1。

#### 1.1 设计原理

旋转因子的生成原理见图 1,储存的相邻 2 个旋转因子  $\theta_i$  和  $\theta_{i+1}$  构成 1 个插值区间  $[a, b]$ ,由于旋转因子分布于正弦曲线上,当选取的区间较小时,该区间可近似于 1 条直线,对这个区间内的其他旋转因子  $\omega$ ,采用泰勒插值近似计算,并且不会引入较多的误差。

泰勒插值的思想是将 1 个区间内的点,由其端点  $\theta_i$  和该段 2 个端点确定的斜率来表示,因而首先要求出插值区间的斜率。见图 1,设每个区间的插值个数为  $2^n-1$ ,则斜率计算公式如下:

$$s_i = \frac{\theta_{i+1} - \theta_i}{2^n} \tag{1}$$

插值点  $\omega$  的值由端点  $\theta_i$  和上式算得的斜率计算得到:

$$\omega = \theta_i + d\omega = \theta_i + s_i dx \tag{2}$$

式中  $dx$  为 2 个旋转因子的标号差。使用泰勒插值法生成旋转因子只增加 1 次加法和 1 次乘法以及一些标号变换的移位操作。

通过利用泰勒公式对正弦函数进行二阶展开,可以求得泰勒线性插值的最大误差为  $\frac{(b-a)^2}{2}M$ ,其中  $M = \max_{x \in (a,b)} |f''(x)|$ 。旋转因子为正弦函数,所以  $M$  最大取 1,  $b-a = \pi/2^m$ ,代入误差函数得到使用泰勒插值引入的误差公式:

$$|\Delta|_{\max} = \frac{(\pi/2^m)^2}{2} \tag{3}$$

$m$  越大,存储的旋转因子和斜率系数越多,误差越小,在应用中可根据需要进行选择。插值误差不应大于其输出的量化误差<sup>[5]</sup>,则需满足:

$$|\Delta|_{\max} = \frac{(\pi/2^m)^2}{2} \leq \frac{1}{2^{k+1}} \tag{4}$$

对  $m$  求值,解得  $m \geq \frac{k}{2} + \log_2 \pi \approx \frac{k}{2} + 1.65$ ,在本设计中取  $m = \lceil \frac{k}{2} + 1 \rceil$ ,其中  $\lceil \cdot \rceil$  表示向上取整。

在应用中,各个设计参数可以自由配置,以满足不同精确度和速度需求。考虑到处理器访存的字节对齐问题,本设计采用以下配置: $N=k=16, j=15, m=i=9$ 。

#### 1.2 旋转因子访存非均匀性

在进行 FFT 运算时,算法对旋转因子的访存并非均匀,见图 2 的 8 点 FFT 蝶形图。

表 1 旋转因子设计参数  
Table 1 Design parameters of twiddle factors

symbol	meaning
$N$	data width of original twiddle factors
$j$	data width of stored twiddle factors
$k$	data width of generated twiddle factors
$i$	data width of slopes
$m$	address width of stored twiddle factors
$n$	phase width of interpolations

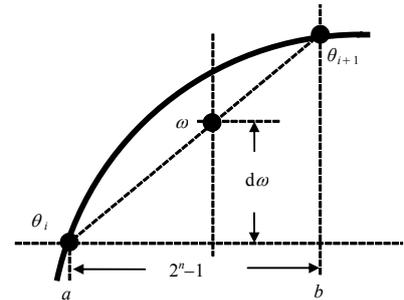


Fig.1 Generation of twiddle factors with Taylor interpolation  
图 1 泰勒插值生成旋转因子原理

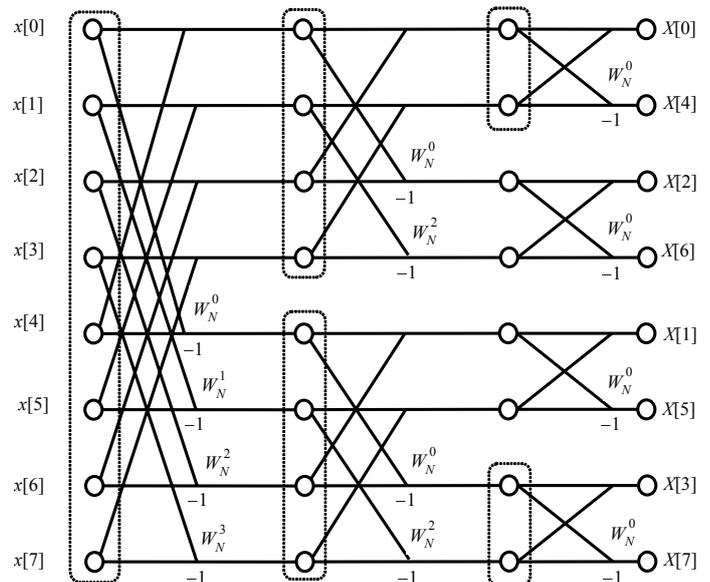


Fig.2 8-point butterfly computation  
图 2 8 点 FFT 的蝶形运算图

旋转因子共有 4 种, 每过一级蝶形, 旋转因子的访存总次数不变而种类变为上级的一半, 且只有每 1 级奇数位置上的旋转因子继续参与下一级蝶形运算。由此可知, 旋转因子的访存具有非均匀性, 旋转因子的访存次数与其位置有关。由 8 点 FFT 推及一般情况, 得到旋转因子访问次数的统计规律, 每个旋转因子的访存次数推导如下: 设输出数据点数为  $N$ , 要求出第  $p$  ( $p$  不为 0) 个旋转因子的访存次数, 需先对  $p$  进行因式分解, 目的是得到 2 的整数次幂, 分解得到形式:

$$p = 2^k \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \cdots, \quad k = 0, 1, 2, \cdots \quad (5)$$

由旋转因子的分布知,  $k$  越大, 旋转因子的访存次数越多。用统计的方法可以得到第  $p$  个旋转因子的访存次数, 用式(6)给出:

$$\beta_p = \sum_{i=0}^k 2^i, \quad p = 1, 2, 3, \cdots, N/2 \quad (6)$$

$p$  为 0 时, 访存次数为  $N-1$ 。表 2 给出了  $N$  为 16 点, 利用式(6)得出的各个旋转因子的访存次数。

结合 FFT 中旋转因子访存的非均匀性, 在本方法中选取访存次数最多的旋转因子进行存储。由于读取这些旋转因子时并不会引入插值误差, 因而能够在总体上较为可观地减小由于插值引入的误差影响, 提高信噪比。

根据 1.1 节的配置,  $m$  取 9, 即存储 512 个旋转因子, 对这 512 个旋转因子在不同点数 FFT 的调用情况做统计, 得出表 3 的结果。

由表 3 可知, 对于最大 131 072 点的 FFT, 所选取 512 个旋转因子的访存率基本都在 65% 以上, 即最多只有 35% 的旋转因子会因为插值引入误差, 下面推导不同调用率下的旋转因子插值误差。

输入为  $N$  点时, 由式(3)和表 3, 总的插值误差能量为:

$$e_{\max} = |\Delta|_{\max}^2 T_{\omega} \delta = \frac{\pi^4}{2^{4m+2}} T_{\omega} \delta \quad (7)$$

设  $\eta$  为输入为  $N$  点时存储的  $2^m$  个旋转因子的调用率, 则  $\delta = 1 - \eta$ ,  $T_{\omega} = \frac{N}{2} \log_2 N$  为  $N$  点 FFT 调用旋转因子的总次数。全查表中所有旋转因子的总能量为  $E = N/4$ , 用旋转因子的总能量除以插值生成旋转因子引入的误差噪声总能量, 即可得到插值生成旋转因子的信噪比为:

$$\mu_{\min} = 10 \lg \frac{E}{e_{\max}} = 10 \lg \frac{2^{4m+1}}{\pi^4 \delta \log_2 N} \quad (8)$$

$\mu_{\min}$  为理论上插值生成旋转因子的最差信噪比, 在实际应用中可以根据该值选取合适的参数  $m$ 。当  $N=16\ 384$ ,  $m=9$  时, 根据式(8)算出  $\mu_{\min}=86.63$  dB, 插值误差较小。

### 1.3 ROM 需求

在本文算法的速率测试方案中, 将旋转因子和插值斜率位宽均设定为 16 位, 为进一步减少访存次数, 在对应位置上二者拼接为目标处理器的一个 32 位字存储于随机存储器(Random Access Memory, RAM)中。在上述设定下, 共需 4K 字节(1K 处理器 32 位字)存储空间, 并且对不同点数的 FFT 本算法需要预先存储的常数表内容保持不变, 从而可以在不同长度的 FFT 算法之间无缝切换, 省去算法的重新配置初始化的时间开销。本文方法与全查表法各自所需存储空间见表 4。

表 4 旋转因子存储空间需求

Table4 Storage requirement of twiddle factors

FFT point	1 024	2 048	4 096	8 192	16 384	32 768	65 536	131 072
table-searching method	2	4	8	16	32	64	128	256
Taylor interpolation method	4	4	4	4	4	4	4	4

## 2 算法性能测试

对旋转因子 Cache 优化的性能测试采用标准 C 程序实现的定点基 2 频率抽取 FFT 算法, 对旋转因子的生成分别采用全查表法和本文提出的方法。为保证算法对比的一致性, 2 份代码均未针对目标处理器结构进行汇编级的访存及流水线优化, 在实际应用中可根据目标处理器结构进行流水线和访存优化, 进一步提高性能。

表 2 16 点 FFT 旋转因子访存次数

Table2 Number of calls to each twiddle factor when  $N=16$

butterfly level	number of twiddle factors							
	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	0	2	0	2	0	2	0
3	4	0	0	0	4	0	0	0
4	8	0	0	0	0	0	0	0
total	15	1	3	1	7	1	3	1

表 3 旋转因子调用率统计结果

Table3 Call ratios of twiddle factors

FFT point	1 024	2 048	4 096	8 192	16 384	32 768	65 536	131 072
call ratio/(%)	100	95.45	89.58	83.65	78.12	73.13	68.65	64.66

测试分为速率测试和误差测试这 2 部分,测试所用处理器为 TI 公司 OMAP3530 Cortex-A8 核,该处理器片上有 16K 字节数据 Cache<sup>[6]</sup>(四路组相联)。OMAP 系列芯片为 TI 公司推出的低功耗手持开放式多媒体应用平台<sup>[7]</sup>,选用 OMAP3530 处理器对本文算法在以后的应用环境有一定的针对性。

### 2.1 速率测试

测试输入为归一化的正弦信号,对不同点数的输入进行测试,每次测试做 500 次 FFT 进行一次计时,取多次结果求平均值。取本文算法与全查表法运算时间做差再除以全查表法的运算时间,得到运算速率提高的百分比,见图 3。

在小点数 FFT 时,由于全查表所需存储的旋转因子较少,处理器的 Cache 容量能够满足需求,因而能够获得较高的 Cache 命中率,从而速度较快。而当点数增大到 4K 点之后,旋转因子尺寸超过处理器片内 Cache 容量,此时全查表算法的 Cache 替换频率增加,处理器片外访存次数增多,计算效率降低,且会导致更多访存功耗<sup>[8]</sup>,本文算法仍能保持较高的 Cache 命中率,有效提高计算速率。

### 2.2 误差测试

以 MATLAB 的 FFT 库函数输出结果为标准值,对全查表法和本文提出的泰勒插值法分别进行误差测试,测得 FFT 输出的平均信噪比,见表 5。可以看出,采用泰勒插值法的信噪比与全查表法相比下降 6 dB 左右,并没有明显的性能下降。

## 3 结论

由于嵌入式处理器 Cache 尺寸有限,使用传统的全查表方法生成旋转因子的 FFT 算法中无法获得较高的计算速率。本文提出的针对小尺寸 Cache 优化的旋转因子生存算法能够有效节省存储空间,提高缓存命中率,在计算大点数 FFT 时,该方法能够有效提高计算速率,降低 CPU 对片外存储器的访问功耗。由于采用了固定内容的旋转因子表,可以在计算不同点数 FFT 之间直接无缝切换,从而省去算法重新初始化的过程,进一步提高上层程序的模式切换速度。本方法还能根据计算精确度需求和目标处理器结构灵活配置算法参数,调节资源开销,目前已经应用于多个音频/语音分析终端设备,实践表明该算法运行结果稳定良好,取得了一定的应用效果。

### 参考文献:

- [1] John L Hennessy, David A Patterson. Computer Architecture: A Quantitative Approach[M]. 4th Ed. Singapore: ELSEVIER, 2007: 288-309.
- [2] 周晓青,李合生,陶荣辉,等. 基于 CORDIC 算法的双曲正余弦函数 FPGA 实现[J]. 信息与电子工程, 2010, 8(2): 211-214. (ZHOU Xiaoqing, LI Hesheng, TAO Ronghui, et al. FPGA implementation of hyperbolic function based on CORDIC algorithm[J]. Information and Electronic Engineering, 2010, 8(2): 211-214.)
- [3] Ma Y, Wanhammar L. A hardware efficient control of memory addressing for high performance FFT processors[J]. IEEE transactions on signal processing, 2000, 48(3): 917-921.
- [4] Abdellatif Bellaouar. Low-Power Direct Digital Frequency Synthesis for Wireless Communications[J]. IEEE JOURNAL OF SOLID-STATE CIRCUITS, 2000, 35(3): 385-390.
- [5] 杜伟韬,卢起斌,徐伟掌,等. 面积优化的调相 DDS 软核编译器设计与实现[J]. 微电子学, 2008, 38(3): 381-384. (DU Weitao, LU Qibin, XU Weizhang, et al. Design of Area Efficient Phase Modulation DDS IP Compile[J]. Microelectronics, 2008, 38(3): 381-384.)
- [6] ARM Inc. Cortex-A8 Technical Reference Manual[EB/OL]. (2010-05-07)[2010-06-15]. [http://infocenter.arm.com/help/topic/com.arm.doc.ddi0344k/DDI0344K\\_cortex\\_a8\\_r3p2\\_trm.pdf](http://infocenter.arm.com/help/topic/com.arm.doc.ddi0344k/DDI0344K_cortex_a8_r3p2_trm.pdf).

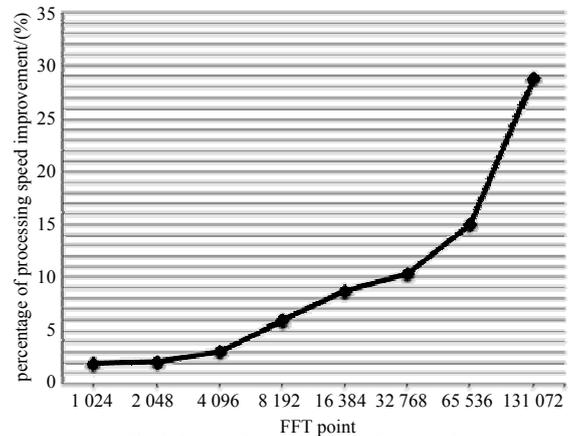


Fig.3 Comparison of calculation speed

图 3 速率对比结果

表 5 误差测试结果(单位: dB)

Table 5 Results of  $R_{SN}$  measurement (unit: dB)

FFT point	1 024	2 048	4 096	8 192	16 384	32 768	65 536	131 072
table-searching method	79.11	78.86	77.47	77.47	77.12	76.40	76.26	74.53
Taylor interpolation method	79.11	78.14	71.31	71.23	70.71	70.08	70.02	68.21

- [7] 李文婷,林岩. 基于 OMAP3530 的多媒体信息处理及通信系统设计[J]. 信息与电子工程, 2010,8(2):149-154. (LI Wenting, LIN Yan. Multimedia applications and communications system based on OMAP3530[J]. Information and Electronic Engineering, 2010,8(2):149-154.)
- [8] 何勇,肖斌,陈章龙,等. 一种低功耗的动态可重构 Cache 设计[J]. 计算机应用与软件, 2009,26(8):247-250. (HE Yong, XIAO Bin, CHEN Zhanglong, et al. The design of a low power dynamically reconfigurable cache[J]. Computer Applications and Software, 2009,26(8):247-250.)

#### 作者简介:



王非非(1986-), 男, 安徽省宿州市人, 在读硕士研究生, 研究方向为数字通信技术、数字信号处理技术. email: stevenwff@sina.com.

杜伟韬(1980-), 男, 山东省莱州市人, 讲师, 研究方向为数字通信技术、数字信号处理的 VLSI 实现等.

(上接第 205 页)

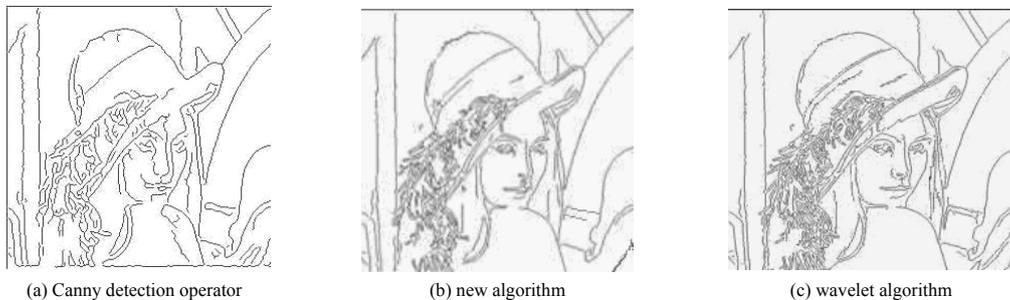


Fig.3 Edge detection of image  
图3 边缘检测效果图

实验结果证明: 本文提出的算法对噪声图像的去噪效果良好, 且边缘提取的效果要优于传统 Canny 算子的效果, 边缘提取准确度较高, 接近于亚像素级的小波算法。而且, 本文算法具有更广泛的使用性, 可用于实现噪声图像和非噪声图像边缘检测。

## 6 结论

提出了一种结合基于各向异性扩散的非线性正则化 Perona-Malik 模型、Zernike 矩和 Sobel 算子的亚像素边缘检测算法, 相较于传统的 Canny 检测算法, 本算法检测效果更精确, 且对于噪声图像也具有良好的效果, 具有更强的适应性和应用前景。

#### 参考文献:

- [1] 程远航. 基于 Zernike 矩的亚像素边缘检测算法[J]. 电脑编程技巧与维护, 2009(12):13-14.
- [2] Zhang JinYu, Chen Yan, Huang XianXiang. Edge detection of image based on improved Sobel operator and genetic algorithms[C]// Proceeding of IASP09. Taizhou:[s.n.], 2009:31-35.
- [3] Fu Bo, Liu Jin, Fan Xiuxiang, et al. A Hybrid Algorithm of Fast and Accurate Computing Zernike Moments[C]// Fourth International Conference on Fuzzy Systems and Knowledge Discovery. Haikou, Hainan:[s.n.], 2007,3:268-272.
- [4] 高世一, 赵明杨, 张雷, 等. 基于 Zernike 正交矩的图像亚像素边缘检测算法改进[J]. 自动化学报, 2008,34(9):1163-1167.
- [5] 曲迎东, 李荣德, 袁晓光, 等. 两级 Zernike 矩算子的快速亚像素边缘检测[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2009,41(5):178-180.

#### 作者简介:



董 静(1985-), 男, 山东济宁人, 在读硕士研究生, 主要研究领域为模式识别和图像处理. email: 404720501@163.com.

王正勇(1969-), 女, 四川省达州市人, 副教授, 主要研究方向为实时信号处理、图像处理和通信电路.