

文章编号: 1672-2892(2011)02-0211-04

小波阈值法降噪分析与改进

蔡 敏

(海军指挥学院 浦口分院, 江苏 南京 211800)

摘 要: 为了有效降低信号中的噪声, 提高信噪比, 本文研究了小波阈值法降噪的原理和小波系数估计方法, 针对估计小波系数的硬阈值法不连续和软阈值法有偏差的缺点, 提出通过引入 α 因子对小波系数的估计方法进行改进, 给出了改进方案估计模型器的模型。数值实验结果表明, α 因子取值适当, 改进方案能够在一定程度上克服软阈值和硬阈值方法中固有的缺点, 取得了较好的降噪效果。

关键词: 小波; 阈值; 降噪; 估计小波系数

中图分类号: TN914

文献标识码: A

Improvement on threshold de-noising based on wavelet analysis

CAI Min

(Pukou Institute, Navy Command College, Nanjing Jiangsu 211800, China)

Abstract: In order to reduce the noise in signal and to increase Signal to Noise ratio, the paper introduces the principle of threshold de-noising, the soft-thresholding and hard-thresholding of estimating the wavelet coefficients. An improved de-noising method and the model of improved estimating machine are put forward by use of α aiming to the inherent shortcomings of above two traditional methods. The simulation results prove that the proposed method shows good de-noising quality and can overcome inherent shortcomings of above two traditional methods to a degree.

Key words: wavelet; threshold; de-noising; estimated wavelet coefficients

1992年美国斯坦福大学的David L Donoho教授和Iain M Johnstone等人提出了用非线性小波变换阈值方法对信号降噪^[1-2]的概念, 该方法因其良好的降噪性能而得到了非常广泛的应用。小波变换的小波基属于紧支集, 小波变换方法具有“集中”的特性, 经该方法处理后的信号能量将集中到少数小波系数上。理论上, 功率谱为常数的白噪声通过任意正交基的变换仍然是白噪声, 并且有着相同的幅度; 相对而言, 幅值较大且能量集中的信号所对应的小波系数值必然大于那些幅值较小且能量分散的噪声所对应的小波系数值。如果能够用一个适当的阈值, 对小波系数进行处理, 就能够去除噪声量而保留有价值的信号量, 也就是通常所谓的“降噪”。采用该方法能够实现信号的近似最优估计, 而且有很广泛的适应性^[3]。在采用小波阈值理论的降噪方法中, 阈值函数体现了对大于和小于阈值的小波系数不同处理策略以及不同的小波系数估计方法^[4]。本文在分析经典的硬阈值和软阈值小波系数估计方法基础上, 针对这两种方法的缺点设计了改进方案。

1 阈值法降噪的原理分析

小波阈值法降噪的理论认为: 信号所对应的小波系数包含信号的主要信息, 其幅值相对噪声的较大, 且个数较少; 而噪声对应的小波系数分布一致, 个数较多, 且相对有用信号的幅值较小。基于这一思想, Donoho等人提出了软阈值和硬阈值降噪方法, 即在通过小波分解处理得到的一组小波系数中, 把代表噪声的绝对值较小的系数置零, 而把代表信号的绝对值较大的系数保留或收缩, 分别对应于硬阈值和软阈值方法, 得出估计小波系数, 然后利用估计小波系数再进行信号重构, 从而达到信号降噪的目标。

含有噪声的一维信号数学模型可用下式表示:

收稿日期: 2010-05-10; 修回日期: 2011-01-12

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60802030/F010201)

$$s(i) = f(i) + \sigma e(i) \quad (1)$$

式中: $f(i)$ 表示真实信号; $e(i)$ 表示噪声信号; $s(i)$ 即为含噪声一维信号。

以简单的高斯白噪声(Gaussian White Noise)模型为例, 即认为 $e(i)$ 满足 $N(0,1)$, 噪声级为 1。在实际工程应用中, 有用信号通常表现为频率较低或是比较平稳的信号, 噪声通常表现为较高频率的信号, 用小波阈值法对含有噪声的一维信号进行降噪的过程包括下列几个步骤:

1) 用小波分解含有噪声的信号。选择某 1 个合适的小波, 并确定适当的分解层数 N , 对信号 $s(i)$ 进行 N 层小波分解, 得到 1 组对应的小波分解系数 $\omega_{j,k}$ 。

2) 对分解所得小波系数进行阈值量化。对 $\omega_{j,k}$, 从第 1 层到第 N 层的各层高频系数选择 1 个阈值, 并对其进行量化处理, 得到估计小波系数 $\hat{\omega}_{j,k}$ 。

3) 用小波重构信号, 也可称为小波逆变换。根据小波分解的第 N 层的低频系数和经过量化处理后的各层的高频系数, 即利用 $\hat{\omega}_{j,k}$ 进行信号的重构, 得到估计信号 $\hat{s}(i)$, 即为降噪之后的信号^[5-6]。

在上述步骤中, 步骤 1) 是小波分解过程, 步骤 3) 为小波重构过程, 是已有成熟的算法; 而步骤 2), 即如何选取阈值和如何进行阈值的量化是小波阈值降噪方法的核心, 也就是说寻找有效的方法对小波系数 $\omega_{j,k}$ 进行估计。可以说步骤 2) 在相当程度上直接决定了信号降噪的质量。

2 传统小波系数估计方法分析

设阈值为 λ , 定义

$$\hat{\omega}_{j,k} = \begin{cases} \omega_{j,k}, & |\omega_{j,k}| \geq \lambda \\ 0, & |\omega_{j,k}| < \lambda \end{cases} \quad (2)$$

称之为硬阈值函数。

软阈值函数定义为:

$$\hat{\omega}_{j,k} = \begin{cases} \text{sign}(\omega_{j,k}) \cdot (|\omega_{j,k}| - \lambda), & |\omega_{j,k}| \geq \lambda \\ 0, & |\omega_{j,k}| < \lambda \end{cases} \quad (3)$$

图 1 和图 2 为这 2 种方法函数的取值示意图, 从

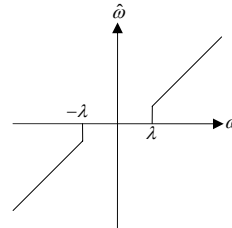


Fig.1 Function of hard threshold
图 1 硬阈值方法函数

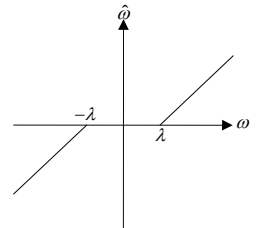


Fig.2 Function of soft threshold
图 2 软阈值方法函数

这 2 种方法得到了广泛的实际应用, 并取得了较好的效果, 但它们本身还是存在一些潜在的缺点。比如硬阈值函数在 λ 处不连续, 利用 $\hat{\omega}_{j,k}$ 重构所得信号可能会产生一定的振荡; 用软阈值方法估计得到的 $\hat{\omega}_{j,k}$ 整体连续性好, 但当 $|\omega_{j,k}| > \lambda$ 时, $\hat{\omega}_{j,k}$ 与 $\omega_{j,k}$ 存在一个恒定的偏差, 直接影响重构信号对真实信号的逼近程度。

3 小波系数估计的改进方案

对式(3)的软阈值进行修改, 引入定义如下:

$$\hat{\omega}_{j,k} = \begin{cases} \text{sign}(\omega_{j,k}) \cdot (|\omega_{j,k}| - \alpha\lambda), & |\omega_{j,k}| \geq \lambda \\ 0, & |\omega_{j,k}| < \lambda \end{cases} \quad (4)$$

式中: $0 \leq \alpha \leq 1$, 当 α 分别取 0 和 1 时, 上式即成为硬阈值和软阈值量化方法。一般来说, 对于 $0 < \alpha < 1$, 该方法估计得到的 $\hat{\omega}_{j,k}$, 大小介于软、硬阈值方法之间, 该模型如图 3 所示。

该方法的思路简单, 且降噪效果好。通过仔细分析可以发现, 如果采用单纯的软阈值方法量化出来的 $\hat{\omega}_{j,k}$, 其绝对值总是比 $\omega_{j,k}$ 小 λ ($\omega_{j,k} \geq \lambda$ 时), 因此可以通过设法减小此偏差进而得到更准确的值; 但在硬阈值方法中, 把这种偏差减小为零也未必就最好, 因为 $\omega_{j,k}$ 本身就是由有用信号对应的小波系数 $\mu_{j,k}$ 和噪声信号对应的小波系数 $v_{j,k}$ 组成的, 在大多数的情况下 $\omega_{j,k}$ 可能会因为 $v_{j,k}$ 的影响而使得 $|\omega_{j,k}| > |\mu_{j,k}|$, 而降噪的目标是使 $\|\hat{\omega}_{j,k} - \mu_{j,k}\|$ 最小。因此, 令 $|\hat{\omega}_{j,k}|$ 的取值介于 $|\omega_{j,k}| - \lambda$ 与 $|\omega_{j,k}|$ 之间会使估计出来的有用信号小波系数 $\hat{\omega}_{j,k}$ 更加接近于 $\mu_{j,k}$ 。基于

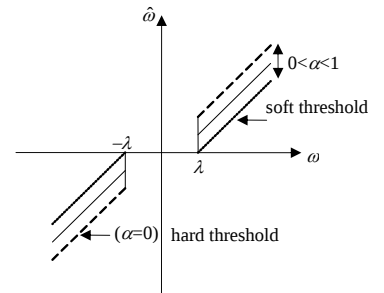


Fig.3 Improved threshold function
图 3 改进后的阈值函数

这一解决思路,在阈值函数中引入 α 因子,并且在0与1之间选择适当的 α 值,以期获得最好的降噪效果。

4 实验分析

4.1 降噪性能比较

对1个含有噪声的信号分别利用硬阈值法、软阈值法和本文研究的改进方案进行降噪对比实验,采用通用的信噪比(Signal to Noise Ratio, SNR)和均方根误差(Root Mean Square Error, RMSE)作为降噪效果的衡量标准。将不含噪声的原始信号 $x(n)$ 作为标准信号,则经小波降噪后,估计信号 $\hat{x}(n)$ 的信噪比公式定义为^[7]:

$$R_{SN} = 10 \lg \left[\frac{\sum_n x^2(n)}{\sum_n [x(n) - \hat{x}(n)]^2} \right] \quad (5)$$

式中 R_{SN} 为信噪比。

原始信号与估计信号之间的均方根误差定义如下:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_n [x(n) - \hat{x}(n)]^2} \quad (6)$$

式中 N 为离散采样信号的长度。降噪后估计信号的信噪比SNR越高,原始信号与估计信号的均方根误差RMSE越小,则估计信号就越接近于原始信号,降噪效果越好。

进行小波分解时,最大分解尺度 J 取为5,选用sym8小波,在每一尺度上取不同的阈值 λ ,即

$$\lambda_j = \sqrt{2 \lg N / \lg(j+1)}$$

此处,对1个信噪比为6.8571 dB的含有噪声的矩形信号分别利用3种方法进行降噪,其中在改进方案中 $\alpha=0.5$ 。实验结果如图4所示^[8-9]。

表1列出了上述实验中,降噪后估计信号的信噪比,以及原始信号与估计信号之间的RMSE。由表1可以看出,改进方案的降噪效果明显要比单纯的软阈值或硬阈值的方法好,从而验证了改进方案的有效性。

表1 信噪比和均方根误差比较

Table1 Comparison between signal-to-noise ratio and average error			
	soft threshold	hard threshold	improved method
R_{SN}	16.109	16.302	16.927
RMSE	0.351 79	0.344 07	0.320 2

需要指出,受研究时间和篇幅限制,本文中选取的阈值 λ 并非最优值。如果 λ 的值选取恰当,则改进方案可能体现出更大的优越性。通常来讲,单纯的软阈值和硬阈值方法稳定性较差,对 λ 的依赖性较强,而且对于给定的 λ 值,软阈值和硬阈值方法至少有一个效果不太好,而对于改进方案,不管 λ 值如何选取,其效果都明显优于单纯的软阈值或硬阈值方法。

4.2 α 因子对降噪性能影响

下面通过实验来分析改进方案中,不同信噪比下 α 因子的选取对信号降噪性能的影响。实验中,最大分解尺度 J 取为5,选用db2小波。

实验1:对1段信噪比为9.3559 dB的含高斯白噪声矩形信号进行降噪,选取不同的 α 因子,降噪后的信噪比曲线如图5所示。在此信噪比下, $\alpha=0.4$ 时,降噪后的信噪比最好。

实验2:对1段信噪比为-2.6853 dB的高斯白噪声矩形信号进行降噪,选取不同的 α 因子,降噪后的信噪比曲线如图6所示。在此信噪比下, $\alpha=0.9$ 时,降噪后的信噪比最好。

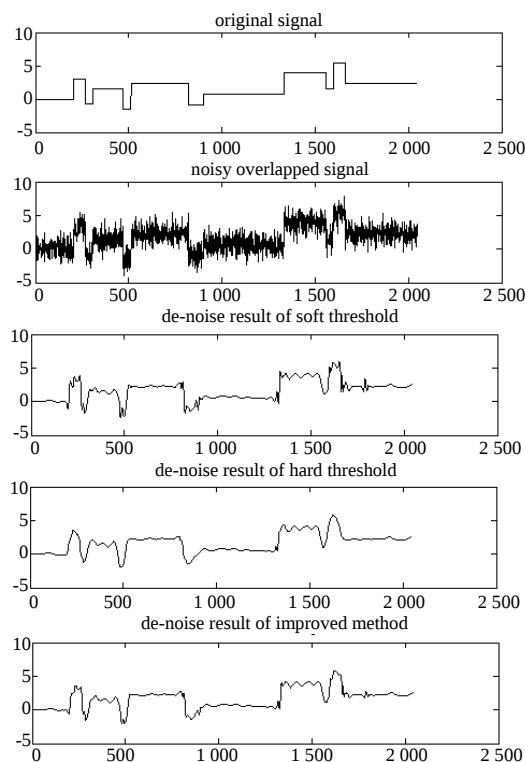


Fig.4 De-noise results of different methods for estimating the wavelet coefficient

图4 不同小波系数估计方法降噪结果

从上面的实验结果可以得出,最佳 α 因子的选取和信号的信噪比相关,具体应用过程中,需通过实验的方法来确定。

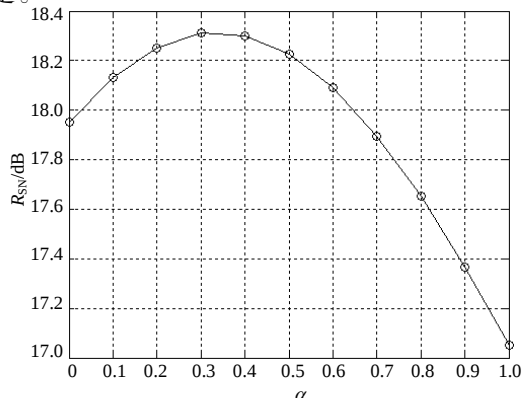


Fig.5 Signal-to-noise curve after de-noising with different α under high signal-to-noise ratio

图5 高信噪比下不同 α 因子降噪后信噪比曲线

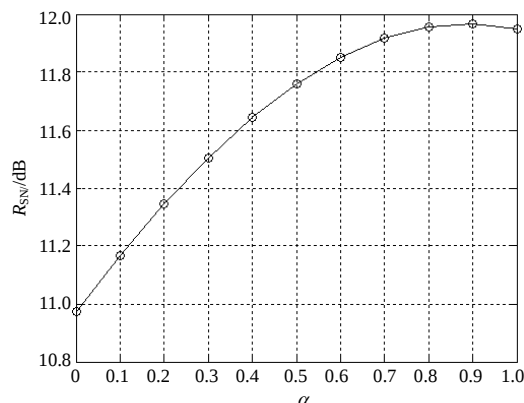


Fig.6 Signal-to-noise curve after de-noising with different α under low signal-to-noise ratio

图6 低信噪比下不同 α 因子降噪后信噪比曲线

5 结论

小波阈值降噪法是一种易于实现并且实用效果较好的信号降噪方法。本文从小波阈值降噪的基本概念出发,分析了小波阈值降噪方法过程中估计小波系数的软阈值和硬阈值的方法,指出这2种方法的固有缺点,为克服这些缺点,提出了有针对性的改进方案,并进行了实验验证。实验结果表明,本文提出的改进小波阈值方法基本克服了软阈值和硬阈值方法的缺点,能够取得更好的降噪效果。同时,针对改进方案中 α 因子的选取规则,实验的数值结果揭示了 α 因子的选取与信噪比之间的关系。

参考文献:

- [1] David L Donoho, Iain M Johnstone, Gerard Kerkycharian, et al. Wavelet shrinkage: asymptopia? [J]. J. Royal Stat. Soc. B, 1995, 57(2): 301-369.
- [2] David L Donoho. De-noising by soft-thresholding [J]. IEEE Transaction on IT, 1995, 41(3): 613-627.
- [3] 成礼智, 王红霞, 罗永. 小波的理论与应用[M]. 北京: 科学出版社, 2004.
- [4] 潘泉, 戴冠中, 张宏才. 基于阈值决策的子波域去噪方法[J]. 电子学报, 1998, 26(1): 115-118.
- [5] 王燕, 王海滨, 刘立汉. 基于小波变换的心音信号降噪方法[J]. 信息与电子工程, 2010, 8(3): 303-307.
- [6] 王甲峰. 随机振动信号的小波处理方法[J]. 自动测量与控制, 2008, 27(8): 78-80.
- [7] Sylvain Sardy, Paul Tseng, Andrew Bruce. Robust Wavelet Denoising [J]. IEEE Transaction on SP, 2001, 49(6): 1146-1152.
- [8] 吴伟, 蔡培升. 基于 MATLAB 的小波去噪仿真[J]. 信息与电子工程, 2008, 6(3): 220-222.
- [9] 赖莉, 李世泽, 罗懋康. 杂波抑制的分形处理: 小波-多尺度自适应 Kalman 滤波[J]. 信息与电子工程, 2009, 7(3): 222-226.

作者简介:



蔡 敏(1969-), 男, 南京市人, 副教授, 主要从事信息系统体系结构、信息融合、模式识别、信号分析等领域的研究. email: cam_nj@sohu.com.