

文章编号: 2095-4980(2013)02-0291-05

基于累加法的高斯白噪声性能分析

张小乾¹, 王 凌^{2a}, 姚远程¹, 林 华^{2b}

(1.西南科技大学 信息工程学院, 四川 绵阳 621010; 2.中国工程物理研究院 a.院机关; b.电子工程研究所, 四川 绵阳 621999)

摘 要: 基于中心极限定理的累加法, 提出了一种新的产生高斯白噪声的方法。首先分析了高斯白噪声的特点, 用均匀分布随机序列累加产生高斯分布随机序列, 分析其时域和频域特征, 并与用 Matlab 里的 randn 函数产生的高斯分布随机序列进行对比。最后用 χ^2 检验法对由累加法产生的高斯分布随机序列进行检验。实验结果表明, 累加法产生的随机数十分近似于高斯分布白噪声。

关键词: 高斯白噪声; 中心极限定理; 累加法; χ^2 检验法

中图分类号: TN913.6

文献标识码: A

Analysis of Gaussian white noise performance based on accumulate method

ZHANG Xiao-qian¹, WANG Ling^{2a}, YAO Yuan-cheng¹, LIN Hua^{2b}

(1.Faculty of Information Engineering, Southwest University of Science and Technology, Mianyang Sichuan 621010, China;

2a.Administrative agency; 2b.Institute of Electronic Engineering, China Academy of Engineering Physics, Mianyang Sichuan 621999, China)

Abstract: A new method producing Gaussian white noise is presented based on the summation law of central limit theorem. The characteristics of Gaussian white noise are analyzed. The Gaussian random sequence generated by the uniformly distributed random sequence summation is analyzed to extract its time domain and frequency domain features, and then compared with the random sequence generated by randn function of Matlab. Gaussian random sequence generated by summation law is tested by χ^2 testing. Experiment results show that the random number generated by summation law is very similar to Gaussian distribution white noise.

Key words: Gaussian white noise; central limit theorem; accumulate method; χ^2 testing

高斯白噪声除了作为噪声雷达干扰机信号或发射信号以外, 在通信和控制系统中的实际应用也极为广泛^[1-3]。所以, 设计实现一个结构简单可靠并且性能优良的高斯白噪声, 对于理论研究和现实工作都是非常必要的。

目前常用的高斯分布随机序列的产生方法有映射法、低通滤波器法、Box-Muller 变换法、Ziggurat 法等^[4-5]。这些方法都可以得到高斯分布随机序列, 但是以上几种方法存在计算比较复杂的问题。而基于中心极限定理的累加法只需要进行加法和减法运算, 实现起来比较简单。本文从硬件实现的快速及简单方面考虑, 提出了一种基于中心极限定理的累加法来产生高斯随机信号。

1 高斯白噪声信号简介

白噪声是在无限宽的频率范围内, 功率分布均匀的噪声, 只是一种理想化的噪声模型。服从正态分布或高斯分布的白噪声, 通常称为高斯白噪声^[6]。

若随机变量 x 的概率密度函数可以写为式(1)的形式, 则称此随机变量是服从正态分布(或高斯分布)的, 其中 μ 是随机变量的期望(或均值), σ^2 是它的方差。

当 $\mu=0$, $\sigma^2=1$ 时, 称随机变量 x 服从标准正态分布^[7]。

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, -\infty < x < \infty \quad (1)$$

高斯白噪声也称高斯型白噪声,其幅度的统计规律服从高斯分布,而定义中的“白”是指它的功率谱在整个频域内为常数。

对于高斯白噪声信号 $n(t)$,其双边功率谱为常数 $N_0/2$ [8], 即:

$$S_w(f) = N_0/2, -\infty < f < \infty \quad (2)$$

欲得它的自相关函数,可取 $n(t)$ 的功率谱密度的傅里叶反变换,即:

$$R_w(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau), -\infty < \tau < \infty \quad (3)$$

从上式可知,高斯白噪声的自相关函数是一个在时间间隔 $\tau = 0$ 处的 δ 函数,其加权系数为 $N_0/2$ 。由此可知,高斯白噪声的任意 2 个不同的样本信号都是统计独立的 [8]。

2 基于中心极限定理的累加法

若随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 相互独立并且服从同一分布,它们的数学期望为 $E(X_k) = \mu, (k=1, 2, \dots)$, 方差为 $D(X_k) = \sigma^2 \neq 0, (k=1, 2, \dots)$, 则通过基于中心极限定理累加变换以后的随机变量 Y_n 满足:

$$Y_n = \frac{\sum_{k=1}^n X_k - E(\sum_{k=1}^n X_k)}{\sqrt{D(\sum_{k=1}^n X_k)}} = \frac{\sum_{k=1}^n X_k - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \quad (4)$$

则它的分布函数 $F_n(x)$ 对于任意 x 满足

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{ \frac{\sum_{k=1}^n X_k - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leq x \right\} = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (5)$$

即服从标准正态分布。

取 $n=12$ 时,分布已经接近高斯分布了 [9]。由上述可知,对于在 $[0,1]$ 上均匀分布、均值和方差分别为 $\mu=1/2, \sigma^2=1/12$ 的随机序列,将若干个此类随机序列累加,再对所得信号进行标准化处理,则得到的随机序列就可以服从标准正态分布。

当 $n=12$ 时,

$$Y_n = \sqrt{\frac{12}{n}} (\sum_{k=1}^n X_k - n\mu) = \sum_{k=1}^n X_k - 6\mu \quad (6)$$

因此,先用 12 个均匀同分布的随机序列进行累加,然后再减去均值的 6 倍,得到的随机序列就近似于标准正态分布的高斯随机序列。

3 基于累加法的随机序列的性能分析

3.1 与 Matlab 的 randn 函数比较

图 1 分别给出了用 3 个、6 个、9 个以及 12 个均匀分布随机序列累加后的信号的统计直方图;图 2 分别给出了用 3 个、6 个、9 个以及 12 个均匀分布随机序列累加后的信号的概率密度,与用 Matlab 里的

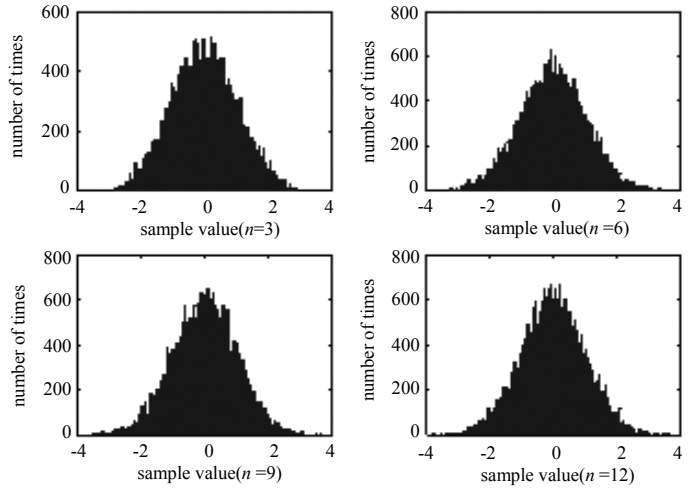


Fig.1 Statistical histogram of the sequence accumulated by different number of uniformly distributed random

图 1 不同数量的均匀分布随机序列累加后的统计直方图

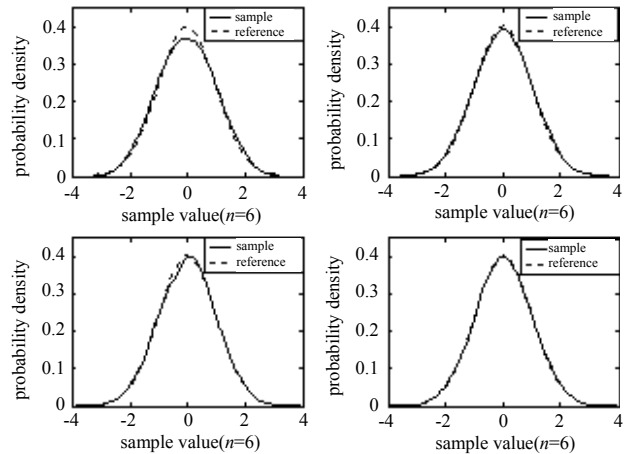


Fig.2 Probability density of the sequence accumulated by different number of uniformly distributed random

图 2 不同数量的均匀分布随机序列累加后的概率密度

randn 函数产生的高斯分布随机序列的概率密度的分布对比图。其中随机序列都是 10 000 个的样本点数。

由图 1 和图 2 可以看出, 增加参与累加的随机序列个数(即增大 n 的取值), 就可以对所得随机序列进行优化。考虑到累加后的效果以及算法实现的方便, 本设计中采用了 12 个参与累加的均匀分布随机序列。

图 3 给出了累加法产生的随机序列时域波形图, 采样频率为 2 MHz, 采样时间为 5 ms, 数据样本点为 10 000 个。图 4 给出了该随机序列归一化后的自相关函数图。图 5 给出了其功率谱估计图(功率谱估计是利用 Bartlett 法产生的)。可以看出, 设计中利用累加法产生的随机序列的时域和频域特性与服从高斯分布的白噪声的相关特性是非常近似的。

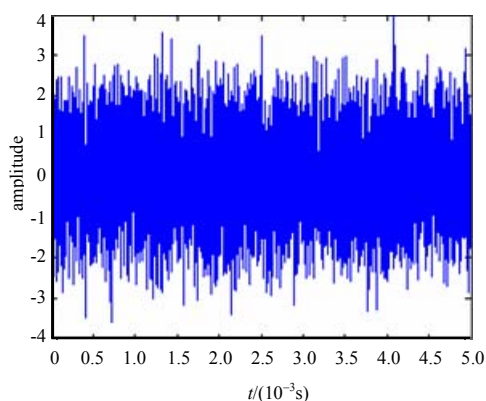


Fig.3 Time domain waveform of the random sequence

图3 随机序列时域波形

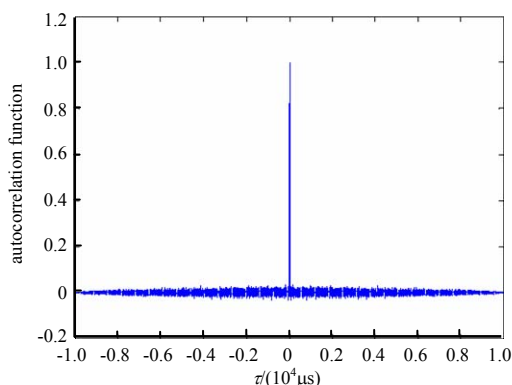


Fig.4 Autocorrelation function of the random sequence

图4 随机序列的自相关函数

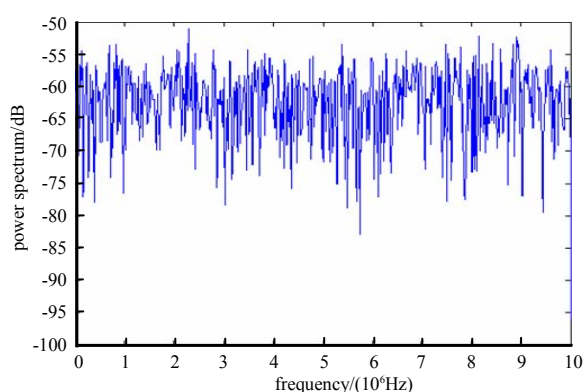


Fig.5 Power spectrum estimation of the random sequence

图5 随机序列的功率谱估计

3.2 分布拟合检验

下面采用了著名的 χ^2 检验法对基于累加法产生的高斯分布随机序列进行分布拟合检验^[10]。基于 χ^2 检验法的基本思想, 皮尔逊使用统计量:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(f_i - np_i)^2}{np_i} \left(\text{或} \chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(f_i - n\hat{p}_i)^2}{n\hat{p}_i} \right) \quad (7)$$

来衡量实际频数 f_i 与理论频数 np_i , 或实际频率 f_i/n 与概率 p_i (或 $\hat{p}_i$) 之间的差异程度。 χ^2 作为检验假设 H_0 的统计量, 且证明了若 n 充分大(一般 $n \geq 50$), 则当 H_0 为真时(不论 H_0 中的分布是何种分布), 统计量式(7)总是近似地服从 χ^2 分布, 其自由度为 $k-r-1$, 即

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(f_i - np_i)^2}{np_i} \left(\text{或} \chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(f_i - n\hat{p}_i)^2}{n\hat{p}_i} \right) \sim \chi^2(k-r-1) \quad (8)$$

其中被估计参数的个数为 r 。

于是, 若在假设 H_0 下计算得到 $\chi^2 \geq \chi_{\alpha}^2(k-r-1)$, 则在显著水平为 α 时拒绝 H_0 , 否则就接受 H_0 。

由于上述方法中, 一般要求样本数 $n \geq 50$, $np_i \geq 5$, 所以进行检验的随机序列样本数选择为 $n=2000$ 个。 H_0 : 假设总体 x 服从标准正态分布, 将 x 轴上的 $[-3.9, 3.9]$ 区间均匀划分为 16 个子区间, 检验过程如表 1 所示。

其中 $k=16$, 且检验中没有进行参数估计, 因此, χ^2 的自由度为 15。而 $\chi_{0.05}^2(15)=24.996 > 15.9951$, 所以在显著水平 0.05 下接受 H_0 , 即产生的随机序列是服从标准正态分布的。

表 1 χ^2 检验计算表
Table1 Calculation sheet of χ^2 test

A_i	f_i	$\hat{p}_i$	$\frac{(f_i - n\hat{p}_i)^2}{n\hat{p}_i}$	A_i	f_i	$\hat{p}_i$	$\frac{(f_i - n\hat{p}_i)^2}{n\hat{p}_i}$
$A_1(-3.9 - -2.8)$	2	0.002 6	1.969 2	$A_9(0 - 0.4)$	305	0.155 4	0.108 2
$A_2(-2.8 - -2.4)$	14	0.005 6	0.700 0	$A_{10}(0.4 - 0.8)$	252	0.132 7	0.676 6
$A_3(-2.4 - -2.0)$	33	0.014 6	0.494 5	$A_{11}(0.8 - 1.2)$	201	0.096 8	0.287 9
$A_4(-2.0 - -1.6)$	68	0.032 0	0.250 0	$A_{12}(1.2 - 1.6)$	127	0.060 3	0.339 6
$A_5(-1.6 - -1.2)$	126	0.060 3	0.241 8	$A_{13}(1.6 - 2.0)$	65	0.032 0	0.015 6
$A_6(-1.2 - -0.8)$	176	0.096 8	1.600 0	$A_{14}(2.0 - 2.4)$	25	0.014 6	0.604 1
$A_7(-0.8 - -0.4)$	285	0.132 7	1.447 5	$A_{15}(2.4 - 2.8)$	5	0.005 6	3.432 1
$A_8(-0.4 - 0)$	314	0.155 4	0.032 9	$A_{16}(2.8 - 3.9)$	0	0.001 9	3.800 0
Σ				Σ	15.995 1		

4 结论

本文首先简述了几种产生高斯分布随机序列的可行方法,考虑到硬件实现,最终选择了利用中心极限定理的累加法。对比其他方法,在产生随机序列的过程中,该方法所设计的系统不需要进行超越函数等复杂运算,只需要进行简单的加法和减法操作。可以用流水线的工作方式在硬件中实现,每个时钟周期完成 2 个随机数的相加,这样在 11 个周期以后就能产生累加后的随机数据。用这种方法,数据产生的速率不会下降,同时数据性能也能满足要求。用 Cyclone 系统的型号为 EP1C12Q240C8 的 FPGA 芯片就可以实现上述高斯白噪声,实现过程中所使用的逻辑单元为 883 个,仅占用 7% 的资源,可以达到降低功耗、节约成本的目的。研究过程中,首先比较均匀分布随机序列累加后的信号和用 Matlab 里的 randn 函数产生的高斯分布随机序列的时域及频域特征;最后对产生的高斯分布随机序列用分布拟合检验中的 χ^2 检验法进行检验。综合考虑得出,利用累加法产生的随机数和高斯分布白噪声十分近似。因此,可以将由累加法产生的随机信号作为实际应用中的高斯白噪声信号源。

参考文献:

- [1] 周扬,王昌宝,周荣跃,等. 噪声干扰对超宽带通信干扰效果分析[J]. 信息与电子工程, 2010,8(4):411-414. (ZHOU Yang,WANG Changbao,ZHOU Rongyue,et al. Noise jamming on UWB system and its effect analysis[J]. Information and Electronic Engineering, 2010,8(4):411-414.)
- [2] 范小麟,马大玮,胡焰智,等. 基于 Simulink 的 JTIDS 抗干扰性能仿真[J]. 信息与电子工程, 2007,5(2):100-103.(FAN Xiaolin,MA Dawei,HU Yanzhi,et al. FPGA Performance Simulation of JTIDS Based on Simulink[J]. Information and Electronic Engineering, 2007,5(2):100-103.)
- [3] 李合生,毛剑琴,赵明生,等. 关于正交小波包变换的几点理论探讨[J]. 电子学报, 2005,33(1):106-110.(LI Hesheng, MAO Jianqin,ZHAO Mingsheng,et al. Some theoretical problems on wavelet packet transform[J]. Acta Electronica Sinica, 2005,33(1):106-110.)
- [4] 姚琮,张兴敢,王茹琪. 基于 CORDIC 算法的高斯随机噪声实时产生研究[J]. 南京理工大学学报:自然科学版, 2006, 30(3):336-338. (YAO Cong,ZHANG Xinggan,WANG Ruqi. Real-time Generating Gaussian Random Noise Based on CORDIC Algorithm[J]. Journal of Nanjing University of Science and Technology(Nature Science), 2006,30(3):336-338.)
- [5] Marsaglia G,Tsang W W. The Ziggurat Method for Generating Random Variables[J]. Journal of Statistical Software, 2000, 5(8):1-7.
- [6] 邵朝. 随机信号分析[M]. 北京:国防工业出版社,2010. (SHAO Chao. Stochastic Signal Analysis[M]. Beijing:National defense industry press, 2010.)
- [7] 周丽. 低截获噪声雷达信号的产生[D]. 南京:南京理工大学, 2007. (ZHOU Li. LPI Noise Radar Signal Generator[D]. Nanjing:Nanjing University of Science and Technology, 2007.)

(下转第 313 页)

