

文章编号: 2095-4980(2014)01-0108-04

斜坡类信号频谱分析时应注意的一个问题

王道宪, 段晓辉

(北京大学 信息科学与技术学院, 北京 100871)

摘要: 斜坡类信号属功率无限信号, 针对常见于各种复变函数与积分变换类教科书中此类信号的傅里叶变换结果提出了质疑, 认为以傅里叶变换所体现的此类信号的频谱特性不具有实际意义或应用背景。通过对傅里叶变换基本定义、运算性质、物理意义以及斜坡信号频谱特性的分析, 表明在信号频谱分析过程中, 傅里叶变换这一频谱分析工具不一定适用于功率无限信号。

关键词: 信号; 频谱分析; 傅里叶变换

中图分类号: TN911.6

文献标识码: A

doi: 10.11805/TKYDA201401.0108

A problem about the spectrum analysis of ramp signal

WANG Dao-xian, DUAN Xiao-hui

(School of Electronics Engineering and Computer Science, Peking University, Beijing 100871, China)

Abstract: Fourier transform of ramp signal, a kind of power-infinite signal, commonly appears in many complex function and integral transformation related textbooks. However, some have questioned the existence of Fourier transforms for power-infinite signals, contending that the spectral characteristics of their transformations lack theoretical significance and practical application. By analyzing the basic definition, computational characteristics, and physical significance of the Fourier transform, along with the frequency characteristics of ramp signals, it is proposed that, in the process of signal spectrum analysis, Fourier transform may not be applicable to power-infinite signals.

Key words: signals; spectral analysis; Fourier transform

1 问题背景

斜坡类信号是指 $t^n u(t)$, $n \geq 1$ 等一系列连续时间信号。其典型特征是随时间变量 t 的增长而趋于无界, 当 $n=1$ 时即所谓斜坡信号 $\text{ramp}(t) = tu(t)$ 。

斜坡信号的常见傅里叶变换是^[1-2]:

$$\text{ramp}(t) = tu(t) \leftrightarrow j\pi\delta'(\omega) - \frac{1}{\omega^2} \quad (1)$$

式(1)较为详细的推导过程可参阅文献[3], 该文以 5 种不同的方法验证了式(1)的结果。有关斜坡信号的傅里叶变换, 还可以找到更多其他不同方法推导出同样的结论, 但无法回避由下述方法所导出的一个全然不同的运算结果:

$$\text{因为: } \text{ramp}(t) = tu(t) = \int_{-\infty}^t u(\eta) d\eta = \int_0^t d\eta$$

$$u(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\eta)u(t-\eta)d\eta = \int_0^{\infty} u(t-\eta)d\eta = \int_0^t d\eta$$

$$\text{所以: } \text{ramp}(t) = tu(t) = u(t) * u(t)$$

分别应用阶跃信号的傅里叶变换和时域卷积定理:

$$u(t) \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega), \quad x(t) * y(t) \leftrightarrow X(\omega)Y(\omega)$$

$$\text{从而有: } \text{ramp}(t) = u(t) * u(t) \leftrightarrow \left[\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \right]^2$$

所以由此方法导出的斜坡信号的傅里叶变换是:

$$tu(t) \leftrightarrow F(\omega) = \left[\pi^2 \delta^2 - \frac{1}{\omega^2} \right] - j \frac{2\pi\delta(\omega)}{\omega} \quad (2)$$

上述运算步骤所体现出的物理意义十分明显:若将阶跃信号 $u(t)$ 看作是某个系统的单位冲激响应,则该系统是一个理想积分器。 $u(t) * u(t)$ 的物理意义是令阶跃信号输入一个理想积分器,则从系统的零状态响应输出自然就可获得斜坡信号,对这一激励响应关系施以傅里叶变换,结果就是式(2)。

式(1)、式(2)是形式上不同、本质上也完全不同的 2 个表达式。如果 2 个复变函数相等,必然要求其实部、虚部各自相等,但式(1)的实部是普通初等函数,式(2)的实部却是含有 δ 函数在内的奇异函数,因此两式所表达的运算结果不相等,这是可以确认的。将问题作更进一步推论:按照式(2)的运算方法,同样也可以推导出当 $n > 1$ 时其他所有斜坡类信号的傅里叶变换,也将具有不同于现有结论^[1-2]的另一种函数形式,这表明对于所有斜坡类信号而言,其傅里叶变换都至少具有 2 种以上的不同函数形式。

根据信号傅里叶变换结果的唯一性,连续时间信号傅里叶变换的结果不会因为所采用的运算方法不同而受影响,变换结果是唯一的,因此式(1)、式(2)必须能够被证明相等才符合傅里叶变换的一般规律或运算性质。于是悖论出现了,傅里叶分析方法面临尴尬:同一连续时间信号竟具有 2 种截然不同的频谱?对造成这一现象的原因应当作何解释?

2 分析

如果傅里叶变换本身是一个完善的积分变换工具,那么在其诸多运算性质之间就应当保证运算是有效的、运算结果是封闭的,针对同一信号采用不同运算方法所求得的结果理当殊途同归、相互等效。是什么原因造成了上述运算上的矛盾?笔者认为:原因就在于傅里叶变换本身并不完善。不完善之处在于:它没有针对任意有待分析的信号,给出一个其傅里叶变换是否存在的判断标准,这个判断标准就是信号如果可以进行傅里叶变换,其必要条件是什么。

傅里叶分析理论中涉及连续时间信号 $f(t)$ 的傅里叶变换是否存在的判断标准方面,仅具有一个充分条件,这就是人们熟知的傅里叶积分定理^[4]。该定理可被简单概括为两项内容: $f(t)$ 在时域 $(-\infty, \infty)$ 上的任一有限区间均满足狄里赫利条件;在全时域 $(-\infty, \infty)$ 绝对可积,即:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty \quad (3)$$

由于这个存在条件只是一个充分条件,它不能用以判定当所给信号不满足该条件时的傅里叶变换是否仍然存在。考虑到傅里叶变换 $F(\omega)$ 的物理意义是对应于连续时间信号 $f(t)$ 的频谱密度函数,因此上述问题意味着:任意给定一个连续时间信号 $f(t)$,即便它不满足绝对可积,傅里叶分析理论并没有限制人们采用各种其他方法得到其形式上的变换式 $F(\omega)$,哪怕这个 $F(\omega)$ 与 $f(t)$ 的实际频谱毫无关系可言,人们也难以对其有所觉察;换句话说:无论斜坡信号的实际频谱是什么,人们至少在函数形式上总可以求得它,而不用考虑它是否真有实际意义。

为避免因傅里叶变换必要条件的缺失可能产生的问题,有学者将傅里叶变换拓广为两部分:傅里叶变换与广义傅里叶变换^[1-2]。值得注意的是:斜坡信号经常被归类于广义傅里叶变换范畴^[3]。

3 关于广义傅里叶变换

引入广义傅里叶变换概念的原因主要在于许多具有工程应用意义的连续时间信号不满足绝对可积条件,但这些信号的傅里叶变换又确实存在,比如阶跃信号和各种幅度有界的周期信号等。

斜坡信号是否属于广义傅里叶变换范畴?为此可以参考广义傅里叶变换的一种定义^[5]:

设有函数 $g(t)$ 与函数序列 $f_N(t) (N=1, 2, \dots, \infty)$ 存在关系: $g(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} f_N(t)$, 如果序列中每个函数 $f_N(t)$ 的傅里叶变换都存在,则称 $g(t)$ 的广义傅里叶变换 $G(\omega)$ 存在。从这一定义可知,广义傅里叶变换实际上就是极限意义上的傅里叶变换。以阶跃信号 $u(t)$ 为例,它不满足绝对可积条件,因而难以按照普通直接求积分的方法求得其傅里叶

变换,为此可以寻找一个与之具有一定联系的函数序列:

$$f_N(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{t}{N}} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad N=1,2,\dots,\infty \quad (4)$$

可以看出:对于某个特定的 N 值,序列中的每一个连续时间信号 $f_N(t)$ 都是绝对可积的,因此它们的傅里叶变换都存在。当 N 趋于无穷时,序列中的信号极限逼近阶跃信号 $u(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} f_N(t)$,因此阶跃信号的傅里叶变换属于广义傅里叶变换,而这个函数序列实际上起到了一个从狭义傅里叶变换(即普通傅里叶变换)到广义傅里叶变换相联系的桥梁作用。

将斜坡信号对比广义傅里叶变换的上述定义,难以为其找到一个与其对应的函数序列,并使该序列中的每一个函数的普通傅里叶变换都存在,因此难以判定斜坡信号的广义傅里叶变换是否存在。

就某种意义而言,广义傅里叶变换是基于实际工程应用目的而定义的,物理上的可能性是变换存在性的足够条件。阶跃信号、符号函数、各类幅度有限的周期信号^[6-8]即是如此;它们的大量实际应用背景使得这些信号的广义傅里叶变换有意义。

目前几乎所有广义傅里叶变换 $F(\omega)$ 都含有 δ 函数项,该一特征使得广义傅里叶变换的频谱图形呈线状分布,因此在工程上常称此类信号的频谱为线状谱。值得注意的是:线状谱中所含的 δ 函数都是冲激函数本身,且冲激强度(冲激函数的系数)为常数,不含冲激函数的各阶导数项或整数幂。

上述关于广义傅里叶变换在频域上的线状频谱特征对应到时域上也同样具有典型特征。

针对绝大多数已知广义傅里叶变换存在的信号(如阶跃信号、直流信号、各种幅度有界的周期信号等)进行分析,它们虽然都不满足绝对可积,信号的平均能量却都是有限的。时间信号的平均能量在运算上被定义为在时间轴上信号平方积分的均值,因而也称这类信号为功率信号:

$$0 < \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^2(t) dt < \infty \quad (5)$$

这一特征使得这类信号便于人们对其进行各种各样的仿真分析或实现^[9-12],并由此验证其频谱特性。显然,斜坡信号在频谱特征方面有别于线状谱,因为其冲激强度为奇异函数而不是常数,在时域特征方面也不属于功率信号,这使得斜坡信号在广义傅里叶变换中显得非常异类。这种信号特征在通常的工程应用实践中实属罕见,难以从物理现实可能性方面对该信号傅里叶变换的合理性获得支撑。

4 关于傅里叶积分定理

傅里叶积分定理实际上描述了这样的关系:在一定条件下,信号傅里叶变换的反变换等于信号本身:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{j\omega\tau} d\tau \right] e^{j\omega t} d\omega \quad (6)$$

因此分辨斜坡信号是否存在傅里叶变换的更有说服力的方法,是对斜坡信号的傅里叶变换再求反变换,验证其能否还原到斜坡信号本身。限于篇幅,这里略去繁琐的推导过程,仅将结论表述于下:无论由上述式(1)或式(2)的变换函数所决定的 $F(\omega)$,与斜坡信号间都不满足傅里叶反变换的运算关系:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \neq \text{ramp}(t) \quad (7)$$

虽说一般而言并非所有信号傅里叶变换的反变换都能一致收敛于原函数本身,但鉴于斜坡信号是一个没有任何间断点的连续时间信号,因而从式(7)的结论基本可以推断(1)、(2)两式的傅里叶变换关系均不成立。

从频谱分析的角度看,以式(6)表示的傅里叶积分定理的核心意义,是将信号展开成以其频谱分量的合成所表示的形式,其中的频谱分量是以傅里叶变换积分中的核函数 $e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$ 所体现出来的各种简谐波。所谓斜坡信号的傅里叶变换关系不成立,指的是以式(1)、式(2)两式所体现的斜坡信号的各简谐波分量的频谱分布关系无法在理论上被确认,因此,围绕斜坡信号傅里叶变换而展开的频谱分析不再有意义。

综合以上分析,对引发上述诸多矛盾的较为合理的解释是:斜坡信号的傅里叶变换其实不存在。正是因为其傅里叶变换不存在,所以如果一定要按照傅里叶分析理论对其进行频谱分析就有可能导致运算上出现的悖论。

5 结论

傅里叶分析的有效性建立在这样的基础上:当信号 $f(t)$ 与频谱密度函数 $F(\omega)$ 构成了一对傅里叶变换 $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ 时: $f(t)$ 体现信号的时域特征, $F(\omega)$ 体现信号的频域特征,两者从不同角度共同描述着信号的内在属性,彼此密不可分,互相可以由此推及彼,傅里叶积分定理的实质即体现于此。斜坡信号的傅里叶分析失去了这一基础,斜坡信号频谱分析的有效性值得质疑。

由此推论:实际应用中并非任意信号的傅里叶变换都有意义。实践表明:绝大多数能量有限信号的傅里叶变换存在;绝大多数功率有限信号的广义傅里叶变换存在。对于功率(平均能量)无限信号而言,其广义傅里叶变换很可能不存在。现有一些文献(尤其是教科书)中所给出的那些关于平均能量无限信号的傅里叶变换结论值得重新再探讨,人们在对这类信号进行频谱分析时有必要持慎重态度,对此结论,作者期待与同行进一步共同探讨。

参考文献:

- [1] 刘明华,周晖杰. 复变函数与积分变换[M]. 杭州:浙江大学出版社, 2012. (LIU Minghua,ZHOU Huijie. Complex Function and Integral Transform[M]. Hangzhou:Zhejiang University Press, 2012.)
- [2] 杜洪艳,尤正书,侯秀梅. 复变函数与积分变换[M]. 武汉:华中师范大学出版社, 2012. (DU Hongyan,YOU Zhengshu, HOU Xiumei. Complex Function and Integral Transform[M]. Wuhan:Huazhong Normal University Press, 2012.)
- [3] 刘正生. 斜坡信号频谱的推导方法[J]. 扬州师院学报:自然科学版, 1984(1):65-69. (LIU Zhengsheng. Method for deriving the ramp signal spectrum[J]. Journal of Yangzhou University:Natural Science Edition, 1984(1):65-69.)
- [4] 徐小蓉. 傅里叶变换及其应用[J]. 新闻天地:论文版, 2009(1):138-140. (XU Xiaorong. Fourier transform and its application[J]. News Universe:The Paper Edition, 2009(1):138-140.)
- [5] 刘培森. 应用傅里叶变换[M]. 北京:北京理工大学出版社, 1990. (LIU Peisen. Application of Fourier transform[M]. Beijing:Beijing Institute of Technology Press, 1990.)
- [6] 解培中,陆音. 周期信号傅里叶变换的讨论[J]. 科技信息, 2011(1):I0013. (XIE Peizhong,LU Yin. Discussion about the Fourier transform of Periodic signals[J]. Science & Technology Information, 2011(1):I0013.)
- [7] 姜小磊. 正确理解符号函数的傅里叶变换[J]. 电气电子教学学报, 2010,32(6):40-42. (JIANG Xiaolei. Correctly Understand the Fourier Transform of Sign Function[J]. Journal of EEE, 2010,32(6):40-42.)
- [8] 张锐,袁丽英. 信号与系统课程中对周期信号频谱分析的理解[J]. 高等函授学报:自然科学版, 2012,25(2):30-32. (ZHANG Rui,YUAN Liying. To understand spectrum analysis of periodic signals from signals & systems course[J]. Journal of Higher Correspondence Education:Natural Science Edition, 2012,25(2):30-32.)
- [9] 张登奇,杨慧银. 信号的频谱分析及 MATLAB 实现[J]. 湖南理工学院学报:自然科学版, 2010,23(3):29-33. (ZHANG Dengqi,YANG Huiyin. Analysis of Signal Spectrum and Realization based on MATLAB[J]. Journal of Hunan Institute of Science and Technology:Natural Sciences, 2010,23(3):29-33.)
- [10] 杨明明. 基于 LabVIEW 的方波电信号傅里叶分析[C]// 第五届全国高等学校物理实验教学研讨会论文集. 上海: [s.n.], 2011:335-339. (YANG Mingming. Fourier Analysis of square wave signals based on Labview[C]// The 5th National Colleges & Universities Physics Experiment Teaching Seminar. Shanghai:[s.n.], 2008:335-339.)
- [11] 庞建丽,高丽娜. 典型信号傅里叶分析及仿真实现[J]. 现代电子技术, 2011,34(13):78-80. (PANG Jianli,GAO Lina. Fourier Analysis and Simulation of Typical Signal[J]. Modern Electronics Technique, 2011,34(13):78-80.)
- [12] 蒋华. 一种快速傅里叶变换算法的 FPGA 实现[J]. 太赫兹科学与电子信息学报, 2008,6(6):444-447. (JIANG Hua. Implementation of a Fast Fourier Transform Algorithm based on FPGA[J]. Journal of Terahertz Science and Electronic Information Technology, 2008,6(6):444-447.)

者简介:



王道宪(1954-),男,河南省开封市人,高级工程师,研究方向为信号与信息处理,多年从事信号与系统、数字信号处理等课程的教学以及相关领域的科研工作.email:wdx@pku.edu.cn.

段晓辉(1968-),男,湖南省郴州市人,教授,研究方向为信号与信息处理.