文章编号：2095-4980(2016)03-0438-05

Logistic 映射多尺度熵分析

刘嘉琪，金永镐，徐红梅*

(延边大学 工学院，吉林 延吉 133002)

摘　要：为 Logistic 映射的理论分析和保密通信应用提供理论支撑，结合 Logistic 映射系统特性随参数 μ 变化的关系，以及多尺度熵能够反映混沌系统远离平衡状态程度的特点，提出了一种运用多尺度熵分析 Logistic 映射非线性动力学特性的方法。从仿真结果得到，多尺度熵能够区分出 Logistic 混沌系统不同状态，并且能够作为量化 Logistic 映射非线性动力学行为的指标。

关键词：Logistic 映射；数值序列；混沌；多尺度熵

中图分类号：TN914.42　　**文献标识码：**A　　**doi：**10.11805/TKYDA201603.0438

Multiscale entropy analysis of Logistic map

LIU Jiaqi，JIN Yonggao，XU Hongmei*

(Institute of Engineering, Yanbian University，Yanji Jilin 133002，China)

Abstract：Considering the characteristic of Logistic chaos system varying with the parameter μ, and the feature that the multiscale entropy reflects the degree away from the equilibrium, a new method is proposed to estimate the characteristic of Logistic nonlinear system based on multiscale entropy. Numerical simulations prove that different states of Logistic chaos system can be distinguished based on multiscale entropy, and quantifiable nonlinear dynamical behavior index is obtained. This work provides a theoretical basis for understanding Logistic chaos analysis and chaos application of secret communication.

Key words: Logistic mapping；numerical series；chaos；multiscale entropy

混沌现象是不含外加随机因素的完全确定性系统所表现出来的内部随机行为，具有不可预测性和不确定性。在一定的控制方法和参数范围内，系统会出现周期运动和混沌现象。自 Lorenz 发现混沌吸引子以来，混沌理论得到了长足的发展。作为形式上比较简单的 Logistic 映射具有极其复杂的动力学行为，20 世纪中期，生态学家们就已经采用 Logistic 映射差分形式的方程来描述物种的变化。Logistic 映射的研究已经取得了许多成果，并在人口预测、环境治理、扩频通信[1]、特别在保密通信等领域得到了广泛的应用。

近年来，国内外学者对 Logistic 映射进行了广泛深入的研究。郑建炜等人基于概率统计理论详细分析了 Logistic 映射多元分类机[2]，杨林静等人研究了噪声相互关联时间对 Logistic 系统亚稳态稳定性的影响[3]，颜鹏程等人研究了 Logistic 映射的均值突变时间序列临界预警研究[4]。目前，这些研究主要集中在对 Logistic 映射模型的研究，并多数采用参数估计的方法。处于混沌状态的 Logistic 映射往往表现出许多不确定性的特性，怎样深入挖掘这些不确定特性中隐含的动力学信息是首要问题。在信息论范畴，熵是对不确定性的最佳量化参数，如何将熵理论与混沌现象有机结合起来，许多学者做了有价值的探讨。潘欣裕等人基于信息熵理论分析了 Logistic 混沌系统的熵特性，得出了 Logistic 系统的熵与初值无关的结论[5]，孙克辉等人讨论了 Logistic 混沌系统不同初值和系统参数的谱熵复杂性[6]，徐红梅等人基于相对熵理论研究了 Logistic 混沌系统时间序列不可逆性，得到了一种新的可量化的非线性动力学行为指标[7]。

上述对于 Logistic 映射特性的研究都是基于时间序列和单一尺度的方法探讨特性，本文将在上述研究的基础上，提出基于多尺度的方法讨论 Logistic 映射的混沌动力学特性，试图从多个角度探寻混沌序列中隐含的动力学

收稿日期：2015-11-12；**修回日期：**2016-01-28

基金项目：吉林省教育厅自然科学基金资助项目(2015,NO.11)；延边大学校基金资助项目(2014,NO.15)；延边大学博士启动基金资助项目(602014093)

*通信作者：徐红梅　email:hmxu@ybu.edu.cn

特性。研究结果证明，Logistic 混沌系统的多尺度熵由参数 μ 决定，与初值 x_0 无关，并且随着参数 μ 增大，Logistic 混沌系统多尺度熵数值增大，多尺度熵变化范围减小，从而证明了本文思路的正确性和可行性。

1　Logistic 映射和多尺度熵理论

1.1 Logistic 映射

经典 Logistic 函数定义为：

$$x_{n+1} = f(\mu, x_n) = \mu x_n (1 - x_n) \tag{1}$$

式中：参数 $\mu \in [0,4]$；$x_n \in [0,1]$。当 $3.57 \leqslant \mu \leqslant 4$ 时，Logistic 映射处于混沌状态，当 $\mu = 4$ 时，Logistic 映射如图 1 所示。C 是抛物线的顶点，x_c 是顶点对应的横坐标，x_p 是函数 $y=x$ 与抛物线的交点。

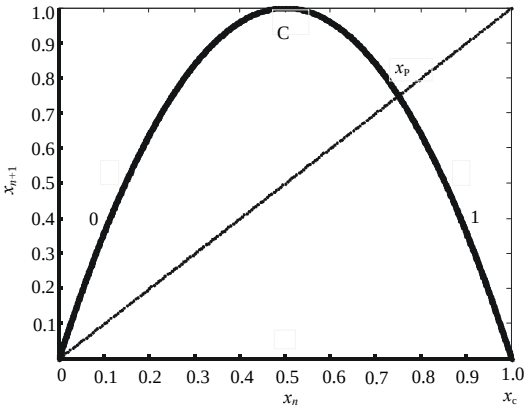

Fig.1 Logistic return mapping
图 1 Logistic 返回映射(μ=4)

根据式(1)，可得到如下推导：

$$x_{n+1} = f(\mu, x_n) = -\mu(x_n - \frac{1}{2})^2 + \frac{\mu}{4} \tag{2}$$

对于式(2)，任意给定参数 μ，当 $x_n = \frac{1}{2}$ 有最大值 $f_{\max}(\mu, x_n) = \frac{\mu}{4}$，当 $x_n = \frac{\mu}{4}$ 时，有最小值 $f_{\min}(\mu, x_n) = \frac{\mu^2}{4}(1 - \frac{\mu}{4})$。令 $x_{k+1} = x_k$，得平衡点方程 $x^* = \mu x^*(1 - x^*)$，解得2个不动点 $x^* = 0$ 和 $x^* = 1 - 1/\mu = 3/4$。根据文献[8]得出Logistic映射有Li-Yoke意义下的混沌行为。任意给定初值 x_0，代入式(1)得到离散数值序列 $\{x_0, x_1, \cdots, x_n, \cdots\}$。以初值 x_0 =0.6 为例，Logistic映射的迭代图如图2所示。

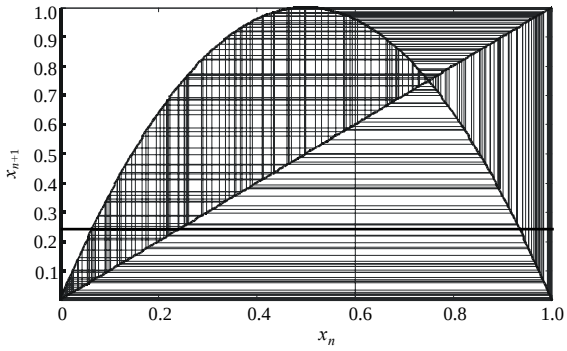

Fig.2 Logistic mapping iterative image
图 2 Logistic 映射迭代图

1.2 多尺度熵理论

设 1 个离散时间序列为 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 共 n 个点，将这一时间序列进行尺度变换，得到新的序列：

$$y_j^{(\tau)} = \frac{1}{\tau} \sum_{i=(j-1)\tau+1}^{j\tau} x(i) \tag{3}$$

式中 τ 为尺度因子，则进行尺度变换后得到的新的时间序列的长度为 n/τ。当尺度因子 $\tau = 1$ 时，新的时间序列与原始时间序列是相同的，以下为不同尺度因子时的序列变化：

$\tau = 2$ 时，$\underbrace{x_1\ x_2}_{y_1}\ \underbrace{x_3\ x_4}_{y_2}\ \cdots\ \underbrace{x_i\ x_{i+1}}_{y_j = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}}\ \cdots$

$\tau = 3$ 时，$\underbrace{x_1\ x_2\ x_3}_{y_1}\ \underbrace{x_4\ x_5\ x_6}_{y_2}\ \cdots\ \underbrace{x_{i-1}\ x_i\ x_{i+1}}_{y_j^{(\tau=3)} = \frac{x_{i-1} + x_i + x_{i+1}}{3}}\ \cdots$

其中，不同尺度 τ 对应的数值序列统计分布情况如下：原数值序列长度为 n，尺度为 τ，新数值序列的长度为 $L = N/\tau$，每个数值区间内元素的个数为 m_i (i=1,2,⋯,N，N 为数值区间的个数)，则每个数值区间内序列个数的概率为 $P_i = m_i / L$，且有 $\sum_{i=1}^{N} P_i = 1$。

多尺度熵计算公式为：

$$\begin{cases} H^{(\tau)}(P) = -\sum_{i=1}^{N} P(x_i) \log P(x_i) \\ \tau = 3, 4, 5, 6, 7, \end{cases} \tag{4}$$

2 Logistic 混沌系统多尺度熵

取 Logistic 映射数据长度 $L=300$，得到处于不同状态时的 Logistic 映射的数值分布如图 3 所示。图 3(a)为参数 $\mu=3.995$时处于混沌状态的序列，图 3(b)为参数 $\mu=3.5$时处于周期分布状态时的序列，图中可以明显看出处于混沌状态和周期状态时数值序列的差别。

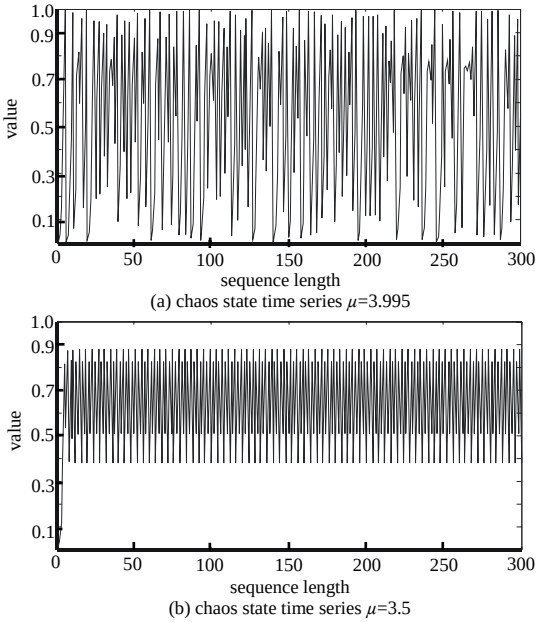

Fig.3 Logistic chaotic mapping time series
图 3 Logistic 混沌映射时间序列

当参数 $\mu\in(0,4]$时，所有的 $x\in(0,1)$，Logistic 混沌系统分岔图如图 4 所示。从图 4 可以得出，随着参数 μ 增大，混沌序列取值范围扩大，分布越来越均匀。根据倍周期分岔定理，Logistic 混沌系统发生倍周期分岔点称为定点，定点对应失稳边界 $f'(\mu,x)=-1$。

2.1 不同参数 μ 与多尺度熵

取 Logistic 映射数值序列长度 $L=5\,040$，当初值 x_0=3 时得到不同参数 μ 和不同尺度 τ 对应的多尺度熵如图 5 所示。由图 5 可知，可以采用多尺度熵理论分析 Logistic 映射的动力学特性，而且不同参数 μ 对应 Logistic 映射不同的周期状态，当取不同尺度 τ 时，对应的多尺度熵值能够明显地区别出 Logistic 映射所处的状态。当 Logistic 映射处于周期态时，多尺度熵值只是集中在几点，并且随着周期增大，熵值也有所增加，这与周期态时数值分布序列只是集中在几个点相吻合；当 Logistic 映射处于混沌状态时，多尺度熵值随着参数 μ 增加而增大，并且随着尺度 τ 增加呈现下降趋势，这是因为参数 μ 增大时 Logistic 映射所处混沌状态逐渐增强，对应的熵值会增大，对于同一参数 μ，当尺度增大时，熵值出现了下降趋势，这是因为当尺度增大时，数值序列的均值出现了稳定趋势，所以导致相应的多尺度熵值下降。

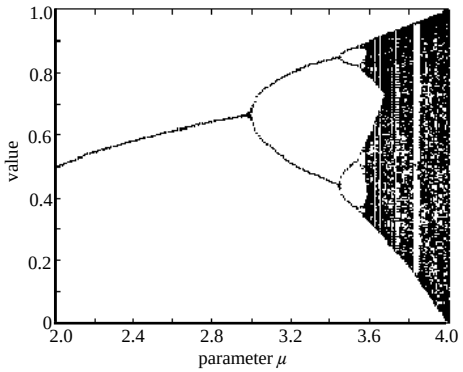

Fig.4 Logistic chaotic system bifurcation diagram
图 4 Logistic 混沌系统分岔图

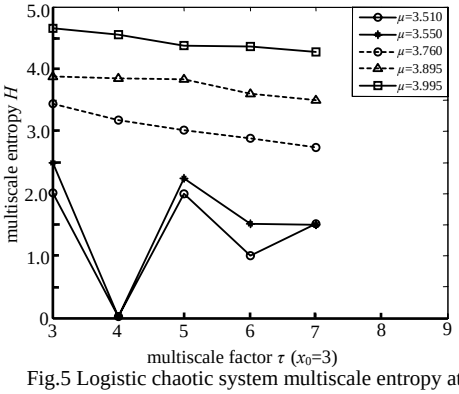

Fig.5 Logistic chaotic system multiscale entropy at the same initial value
图 5 初值相同时 Logistic 混沌系统多尺度熵

2.2 不同周期状态对应的多尺度熵

Logistic映射符号序列数据长度 $L=5\,040$，尺度 τ 从3取到7，分别计算参数 $\mu=3.760$ 和 $\mu=3.995$时的多尺度熵变化范围，得到多尺度熵变化区间与不同参数μ的关系如图6所示。

由图 6 中多尺度熵变化趋势可知：

1) Logistic 映射处于周期态时多尺度熵的变化范围大，处于混沌状态时多尺度熵变化范围小。这是因为当 Logistic 映射处于周期态时，数值主要集中在几个有限的范围内，根据熵理论的特性可知必然会导致数据多尺度熵集中在几个点的同时并且变化范围大，当处于混沌状态时，Logistic 映射数值范围具有各态历经的特性，这样多尺度熵值就会出现下降趋势。

2) 对比图 6(c)和图 6(d)可知，当 Logistic 映射处于混沌状态时，多尺度熵值变化范围变小，并且随着参数 μ

的增加，变化范围逐渐变小。当 Logistic 映射处于混沌状态时，数值出现了各态历经的变化，但是参数 μ 增大时，数值的变化范围会相应增大，根据熵计算方法得出的多尺度熵值变化范围会减小。

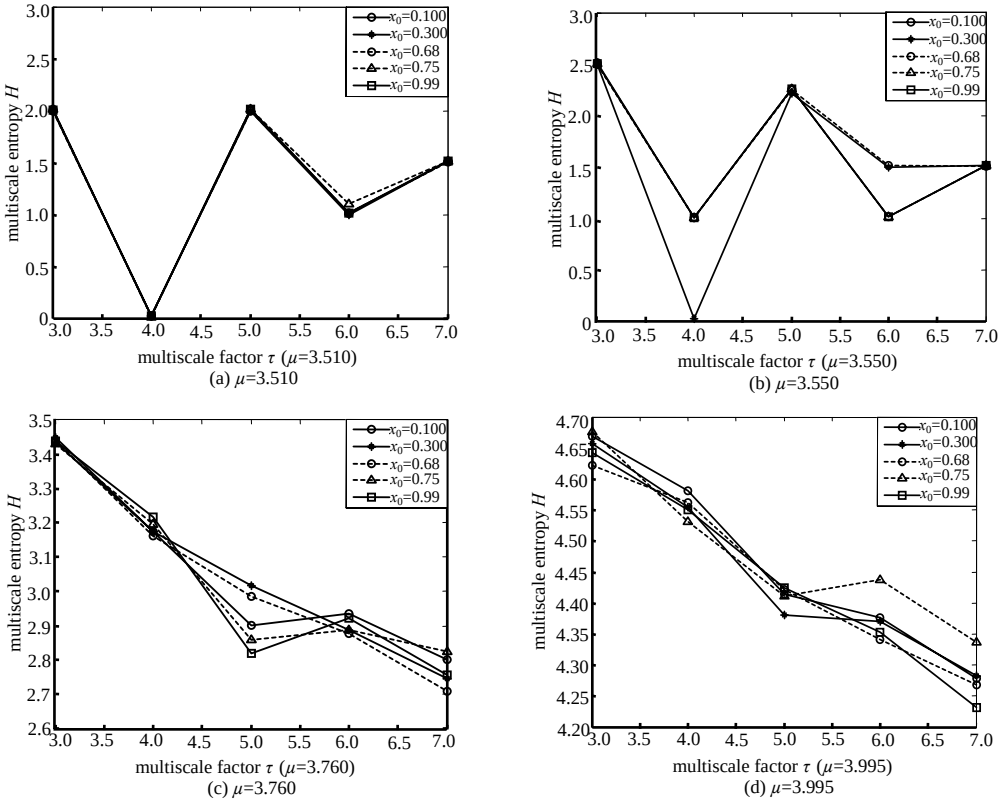

Fig.6 Different μ corresponding Logistic mapping multiscale entropy

图 6 不同参数 μ 对应的 Logistic 映射多尺度熵

3 结论

本文提出一种采用多尺度熵理论分析Logistic混沌特性的新方法。结合数学仿真实验，得到Logistic混沌数值序列的特性：

1) Logistic映射处于周期态时，多尺度熵集中分布在几个数值点处，并且多尺度熵值随着参数μ的增加而增大；

2) Logistic 映射处于混沌态时，多尺度熵值呈现连续分布状态，初值 x_0 的变化基本没有改变序列的多尺度熵值变化趋势，并且随着尺度的增大，多尺度熵值呈现下降的趋势；

3) 取某些特定的参数 μ 时，Logistic 映射多尺度熵值从连续分布状态进入了间断模式后又进入了连续分布状态，这表明 Logistic 映射出现了切分岔状态，这与周期 3 意味着混沌正好吻合。

根据多尺度熵理论，将物理学和统计学结合起来，实现了利用统计学理论量化 Logistic 映射离开平衡状态程度，为 Logistic 映射的理论分析和实际应用提供理论支撑。

参考文献：

[1] 李昂,常青. 一种高安全性的复合混沌序列的性能研究[J]. 太赫兹科学与电子信息学报, 2014,12(3):362–369. (LI Ang,CHANG Qing. A kind of high security performance study of compound chaotic sequence[J]. Journal of Terahertz Science and Electronic Information Technology, 2014,12(3):362–369.)

[2] 郑建炜,王万良,蒋一波,等. 概率型稀疏核 Logistic 多元分类机[J]. 电子与信息学报, 2011,33(7):1632–1638. (ZHENG Jianwei,WANG Wanliang,JIANG Yibo,et al. Probabilistic sparse kernel logistic multi-classifier[J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2011,33(7):1632–1638.)

[3] 杨林静,戴祖诚. 噪声相互关联时间对 logistic 系统亚稳态稳定性的影响[J]. 物理学报, 2012,61(10):100509–1–100509–4. (YANG Linjing,DAI Zucheng. The effects of correlated time between noises on stability of unstable state in logistic system[J]. Acta Physica Sinica, 2012,61(10):100509–1–100509–4.)

[4] 颜鹏程,侯威,胡经国. 基于logistic模型的均值突变时间序列临界预警研究[J]. 物理学报, 2012,61(18):189202-1-189202-8. (YAN Pengcheng,HOU Wei,HU Jingguo. The critical warning research of the mean time series mutations based on logistic model[J]. Acta Physica Sinica, 2012,61(18):189202-1-189202-8.)

[5] 潘欣裕,赵鹤鸣. Logistic混沌系统的熵特性研究[J]. 物理学报, 2012,61(20):200504-1-200504-7. (PAN Xinyu,ZHAO Heming. Research on the entropy of logistic chaos[J]. Acta Physica Sinica, 2012,61(20):200504-1-200504-7.)

[6] 孙克辉,贺少波,何毅,等. 混沌伪随机序列的谱熵复杂性分析[J]. 物理学报, 2013,62(1):010501-1-010501-8. (SUN Kehui,HE Shaobo,HE Yi,et al. Complexity analysis of chaotic pseudo-random sequences based on spectral entropy algorithm[J]. Acta Physica Sinica, 2013,62(1):010501-1-010501-8.)

[7] 徐红梅,郭树旭. 基于符号相对熵的Logistic混沌系统时间不可逆性分析[J]. 电子与信息学报, 2014,36(5):1242-1246. (XU Hongmei,GUO Shuxu. Time irreversibility analysis of logistic chaos system based on symbolic relative entropy[J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2014,36(5):1242-1246.)

[8] 禹思敏,吕金虎,陈关荣. 动力系统反控制方法及其应用[M]. 北京:科学出版社, 2013. (YU Simin,LV Jinhu, CHEN Guanrong. Anti Control Method and Application of Power System[M]. Beijing:Science Press, 2013.)

作者简介：

刘嘉琪(1993–)，女，山西省忻州市人，在读硕士研究生，研究方向为智能开关变换及控制、混沌动力学.email:1193279872@qq.com.

金永镐(1964–)，男，吉林省和龙市人，教授，硕士生导师，研究方向为智能开关变换及控制、混沌动力学、无线通信技术.

徐红梅(1975–)，女，吉林省德惠市人，副教授，硕士生导师，研究方向为智能开关变换及控制、混沌动力学、无线通信技术.

* *

第三届新型光电探测技术及其应用研讨会

光电探测技术是现代信息获取的主要手段之一，光电探测技术的发展是随着其他关键技术的发展而发展的，由于激光技术、光波导技术、光电子技术、光纤技术、计算机技术的发展，以及新材料、新器件、新工艺的不断涌现，光电探测技术取得了巨大发展。近年来，光电探测技术引起了业内人士的普遍关注，在军事和民用领域占有越来越重要的地位。

继前两届新型光电探测技术及其应用研讨会成功召开之后，应广大专家和代表要求，组委会将于2016年11月在西安市继续举办“第三届新型光电探测技术及其应用研讨会”，深入研讨近年来涌现出的各种新型探测技术，包括微光探测、偏振探测、量子探测、单光子探测技术等。以促进我国新型光电探测技术及相关产业的可持续、健康发展。诚挚欢迎国内外相关领域的科研人员、教师、研究生等踊跃投稿。

主办单位：国家自然基金委员会 中国工程院信息与电子工程学部 中国光学工程学会 微光夜视技术重点实验室

承办单位： 中国光学工程学会 中国宇航学会光电技术专业委员会 红外与微光技术应用产业联盟

联办单位：北京仿真中心 北京理工大学 长春理工大学

征文方向：

- 紫外探测技术及应用
- 微光探测技术及应用
- 单光子探测技术及应用
- 红外探测技术及应用
- 太赫兹探测技术及应用
- 激光探测技术及应用
- 可见光探测技术及应用
- 偏振探测技术及应用
- 量子探测技术及应用
- 多光谱/高光谱/超光谱探测技术及应用
- 复合探测技术及应用
- 空间探测技术及应用
- 信号处理与检测
- 其他应用

论文发表：投稿请登录：http://events.kjtxw.com/tougao/1426493004.html，中英文兼收。

请作者登录网站提交论文全文，组委会请专家进行审稿。通过审查的稿件被大会录用。择优推荐到正式出版物发表。英文稿件，将被SPIE会议论文集（EI检索）收录。中文稿件推荐至《红外与激光工程》（EI）、《光学精密工程》（EI）、《强激光与粒子束》、《中国光学》（科技核心期刊）、《太赫兹科学与电子信息学报》（科技核心期刊）正刊出版。

投稿截止时间：2016年9月30日 **组委会联系方式：** 秘书处联系人：刘艳 电子邮箱：liuyan@csoe.org.cn 联系电话：022-58168510