第 14 卷　第 6 期　**太赫兹科学与电子信息学报**　Vol.14，No.6
2016 年 12 月　Journal of Terahertz Science and Electronic Information Technology　Dec.，2016

文章编号：2095-4980(2016)06-0925-04

混合基 FFT 算法运算量分析

程志鹏[1]，马　琪[1]，竺红卫[2]

(1.杭州电子科技大学 微电子 CAD 研究所，浙江 杭州 310018；2.浙江大学 超大规模集成电路设计研究所，浙江 杭州 310027)

摘　要：通过理论推导、定量分析和实验设计的研究方法分析了非 2 整数次幂点数 *N* 的混合基快速傅里叶变换(FFT)算法运算量大小与 *N* 分解因子的不同组合方式以及组合次序的关系。实验结果表明，在一定条件下，对于相同 FFT 点数 *N* 的混合基 FFT 的不同分解因子组合，其算法运算量与所有分解因子总和 *K* 的大小有关，但与因子的组合次序无关。最后提出了建立混合基 FFT 最小运算量的分解因子匹配库作为使用混合基 FFT 时的分解因子组合选择参考表的设想。为相关研究和实际应用的工程人员提供一定参考。

关键词：混合基快速傅里叶变换(FFT)；频谱扩散；分解因子；计算复杂度

中图分类号：TN401　　**文献标志码：**A　　**doi：**10.11805/TKYDA201606.0925

Computational complexity analysis on mixed-radix FFT

CHENG Zhipeng[1]，MA Qi[1]，ZHU Hongwei[2]

(1.CAD Research Center，Hangzhou Dianzi University，Hangzhou Zhejiang 310018，China；
2.Institute of Very Large Scale Integration Circuit, Zhejiang University，Hangzhou Zhejiang 310027，China)

Abstract：Through the research method of theoretical derivation, quantitative analysis and design of experiment, the relationship among the computational complexity of the mixed-radix Fast Fourier Transform(FFT) algorithm in which *N* is not the integer power of 2, different combinations and composite sequences of *N*'s decomposition factors are analyzed. The experimental result indicates, under certain conditions, for the mixed-radix FFT of the same FFT point *N*, the computational complexity of the mixed-radix FFT algorithm relates to the size of the total *K* of *N*'s decomposition factors, but has nothing to do with composite sequences of *N*'s decomposition factors. An idea is proposed to establish a matching library of the combinations of *N*'s decomposition factors for mixed-radix FFT, acting as a reference table for obtaining minimal computational complexity when using mixed-radix FFT. It can also provide reference for the related research and engineering personnel in the practical applications.

Keywords：mixed-radix Fast Fourier Transform(FFT)；spectrum spread；decomposition factor；computational complexity

快速傅里叶变换(Fast Fourier Transform，FFT)因其计算量小的显著优点，获得了广泛的应用，结合高速硬件能实现对信号的实时处理。因此对 FFT 算法更深一步的研究具有现实意义。

科学研究领域中，长度为 2 整数次幂的 FFT 是比较常用的计算手段。然而在实际的工程应用中，虽然可以通过将非 2 整数次幂点数补零[1]至 2 的整数次幂再采用基-2FFT[2]的方法，以提高计算速度，但在长度为非整数倍周期的情况下，补点容易发生频谱泄漏[3]，造成频谱失真[4]，因此也可以使用混合基 FFT 来解决非 2 整数次幂点数的计算。

混合基 FFT 算法能自动适应不同长度的变换运算，可以大大加强 FFT 在工程应用上的适用性。然而混合基 FFT 中 *N*(FFT 的点数)的因式分解因子的不同组合方式对算法运算量(只考虑时间复杂度)是有影响的，而且存在一定的关系。本文先分析了混合基 FFT 算法运算量大小与 *N* 分解因子的不同组合方式以及组合次序的关系，随后通过实验加以验证，最后提出了建立获得混合基 FFT 最小运算量的分解因子匹配库作为使用混合基 FFT 时的分解因子组合选择参考表的设想。

收稿日期：2015-11-05；**修回日期：**2015-12-03

1 混合基 FFT 的优势

为说明混合基 FFT 在处理非 2 整数次幂点数 FFT 计算的优势，选取一组试验仿真数据进行分析。进行 FFT 运算的信号函数表达式如下：

$$f(t)=\sin(1+2\pi\times 50\times t)+3\sin(1.5+2\pi\times 100\times t)+10\sin(2.5+2\pi\times 150\times t)+100\sin(1.5+2\pi\times 200\times t)$$

试验环境：基于 Python 语言[5]的 Spyder 科学计算软件平台。这组试验数据中，假定仅已知 464 点连续采样数据，序列长度不满足，图 1 是在采用补零值点的方式将点数补到 512 点再进行基 2-FFT 得到的频谱图，而图 2 则是采用 N=464=2×8×29(N 因式分解因子的某一种组合方式及组合次序)的混合基 FFT 得到的频谱图。

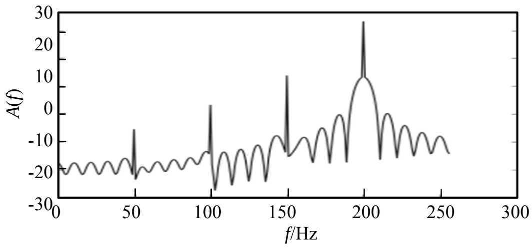

Fig.1 Radix-2 FFT spectrum diagram of zeroizing
图 1 补零的基 2-FFT 频谱图

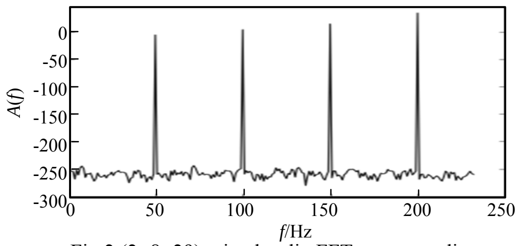

Fig.2 (2×8×29) mixed-radix FFT spectrum diagram
图 2 (2 × 8 × 29)混合基 FFT 频谱图

比较补零的基 2-FFT 与混合基 FFT 各自计算得到频谱图，可以发现，混合基 FFT 的计算结果十分良好，而补零的基 2-FFT 计算的频谱波形明显出现了“畸变”，或者说频谱扩散[6]。因此，更深一步地研究混合基 FFT 有着现实意义，而研究的重点就是在 N 确定的情况下不同组合和不同次序的混合基 FFT 所对应的算法运算复杂度，尤其是大点数 N 的混合基 FFT 算法运算复杂度。

2 混合基 FFT 算法

理论上，只要序列长度 N 是复合数[7](可以分解因子)，就存在混合基算法。已知 w 点的直接法离散傅里叶变换(Discrete Fourier Transform，DFT)的时间复杂度等于 w^2 次复数乘法与 $w(w-1)$ 次复数加法运算时间之和。

当 $N=r_0r_1$ 时，那么 L=2，如果不算其他相关性极小的工作量，其混合基 FFT 的运算量为：

1) 直接法求 r_1 个 r_0 点 DFT：$r_1r_0^2$ 次复数乘法和 $r_1r_0(r_0-1)$ 次复数加法；

2) 乘 N 个旋转因子[8]：N 次复数乘法；

3) 直接法求 r_0 个 r_1 点 DFT：$r_1r_0^2$ 次复数乘法和 $r_0r_1(r_1-1)$ 次复数加法。

总运算量为 $N(r_0+r_1+1)$ 次复数乘法与 $N(r_0+r_1-2)$ 次复数加法之和。由上述计算方法可以推算出，当 $N=r_0r_1\cdots r_{L-1}$ 时，采用的混合基算法所需的复数乘法总次数为：

$$N[(\sum_{i=0}^{L-1}r_i)+L-1] \tag{1}$$

所需的复数加法总次数为：

$$N[(\sum_{i=0}^{L-1}r_i)-L] \tag{2}$$

混合基 FFT 算法运算量为以上两者之和。

因此可以得到以下结论：在忽略一些相关性极小的影响因素后，在 FFT 点数 N 和 N 的分解因子个数 L 一定的情况下，混合基 FFT 算法运算量只与所有分解因子 r_i 的总和 K 的大小有关，而与因子的组合次序无关。如 N=9 990 时，组合方式可以是(1 665 × 2 × 3),(2 × 1 665 × 3),(111 × 9 × 10)等，其中，(1 665 × 2 × 3)和(2 × 1 665 × 3)的运算量相同，因为它们的分解因子总和 K 的值均为 1 670。而(111 × 9 × 10)的分解因子总和 K=130，也就是说(1 665 × 2 × 3)组合的混合基 FFT 运算复杂度要高于(111 × 9 × 10)。其中，(1 665 × 2 × 3)组合与(111 × 9 × 10)组合的复数乘法次数比为 1 672N:132N，(1 665 × 2 × 3)组合与(111 × 9 × 10)组合的复数加法次数比为 1 667N:127N。

3 混合基 FFT 算法运算量关系的实验验证

混合基 FFT 算法采用 C 语言编程，运行软件为：Visual Studio 2013，运行平台为：Intel(R)Core(TM)2 Duo CPU，主频 2.94 GHz，内存 2.00 GB 及操作系统 32 位 win7。由于 Windows 操作系统属于非实时操作系统，多任务分时轮转方式工作，因此在程序运行时间测试时存在一定的时间误差。为了得到更好的实验分析数据，进行多次试验校准且选用 N 值较大的混合基 FFT 进行测试。

由于复数乘法比复数加法更费时间，为方便实验验证，在假设分解因子总和 K 较大、L 较小的前提下，可将混合基算法总的理论运算量计算简化为：$N[(\sum_{i=0}^{L-1} r_i)+L-1]$ 次复数乘法运算与 $N[(\sum_{i=0}^{L-1} r_i)+L-1]$ 次复数加法运算之和。可以假定一次复数乘法运算与一次复数加法运算的运算量用 t 表示，那么混合基 FFT 算法总的理论运算量为：$N[(\sum_{i=0}^{L-1} r_i)+L-1]t$ 。

表 1、表 2 中分别是点数 N 为 3 位数和 4 位数(分解因子个数 L=3)的情况下，对 3 组不同 N 值各自取 5 个不同分解因子组合进行混合基 FFT 计算的运算量测试数据对比。图中，理论运算量是假定 t=1 时得到的混合基 FFT 算法总的理论运算量：$N[(\sum_{i=0}^{L-1} r_i)+L-1]$，理论倍数关系和实际倍数关系是 N 的不同分解因子组合所对应的运算量，与 5 个分解因子组合中最小运算量的分解因子组合所对应的运算量之间的对比倍数。

表 1 N 值为 3 位数、不同分解因子下混合基 FFT 的运算量对比

Table1 Mixed-radix FFT computation contrast when N is 3

point	factor combinations	theoretical computation	theoretical multiple	actual time/ms	actual multiple
$N1$=792	11×9×8	30×$N1$	1	1.439 965 563	1
	66×2×6	76×$N1$	2.533 333 33	3.923 220 020	2.724 523 5
	2×6×66	76×$N1$	2.533 333 33	3.871 004 560	2.688 261 9
	132×2×3	139×$N1$	4.633 333 33	6.624 359 690	4.600 359 8
	2×3×132	139×$N1$	4.633 333 33	7.091 997 720	4.925 116 2
$N2$=880	11×8×10	31×$N2$	1	1.466 275 433	1
	88×2×5	97×$N2$	3.129 032 26	4.396 886 860	2.998 677 3
	2×5×88	97×$N2$	3.129 032 26	4.669 397 220	3.184 529 4
	110×2×4	118×$N2$	3.806 451 61	5.681 014 810	3.874 452 7
	2×4×110	118×$N2$	3.806 451 61	5.752 801 60	3.923 411 3
$N3$=990	11×15×6	34×$N3$	1	1.606 993 825	1
	55×6×3	66×$N3$	1.941 176 47	3.380 612 340	2.103 687 2
	3×6×55	66×$N3$	1.941 176 47	3.189 229 180	1.984 593 3
	165×2×3	172×$N3$	5.058 823 53	8.496 754 070	5.287 359 5
	2×3×165	172×$N3$	5.058 823 53	8.258 531 050	5.139 118 1

表 2 N 值为 4 位数、不同分解因子下混合基 FFT 的运算量对比

Table2 Mixed-radix FFT computation contrast when N is 4

point	factor combinations	theoretical computation	theoretical multiple	actual time/ms	actual multiple
$N1$=7 448	133×7×8	150×$N1$	1	8.372 966 573	1
	133×2×28	165×$N1$	1.1	9.323 485 33	1.113 522 34
	28×2×133	165×$N1$	1.1	10.009 353	1.195 436 88
	532×7×2	543×$N1$	3.62	30.736 813 4	3.670 958 57
	7×2×532	543×$N1$	3.62	31.704 513 7	3.786 532 94
$N2$=8 010	267×10×3	282×$N2$	1	15.622 691 3	1
	267×2×15	286×$N2$	1.014 184 4	15.620 715 8	0.999 873 55
	2×15×267	286×$N2$	1.014 184 4	16.097 148 1	1.030 369 72
	1 335×2×3	1 342×$N2$	4.758 865 25	75.531 344 18	4.834 720 39
	2×3×1 335	1 342×$N2$	4.758 865 25	73.512 881 53	4.705 519 69
$N3$=9 990	111×10×9	132×$N3$	1	7.167 652 229	1
	555×2×9	568×$N3$	4.303 030 3	30.727 908 31	4.287 025 56
	2×9×555	568×$N3$	4.303 030 3	31.183 833 93	4.3506 343 4
	1 665×2×3	1 672×$N3$	12.666 666 7	89.135 350 57	12.435 780 6
	2×3×1 665	1 672×$N3$	12.666 666 7	90.753 164 94	12.661 491 1

通过对表 1 和表 2 的实验结果分析，在一定误差范围内，可以得出以下结论：

1) 在 FFT 点数 N 和 N 的分解因子个数 L 相同的前提下，混合基 FFT 算法运算量与分解因子的组合次序无关，如：N=8 010 时的分解因子组合(1 335×2×3)和(2×3×1 335)；

2) 在 FFT 点数 N 和 N 的分解因子个数 L 相同的前提下，混合基 FFT 算法运算量与分解因子的总和 K 有关，而且在 K 足够大，L 较小时，与 K 成稳定的比例关系。

4 建立混合基 FFT 的最小运算量匹配库的设想

以上的理论分析与实验表明：相同 FFT 点数 N(N 的分解因子个数 L 相同)的混合基 FFT 的不同分解因子组合，其算法运算量与所有分解因子总和 K 的大小有关，且与因子的组合次序无关。那么如果能够为任意点数混合基 FFT 确立算法运算复杂度之间的倍数关系，建立其获得最小运算量的分解因子匹配库，为混合基 FFT 应用提供因子组合选择的参考表，将使混合基 FFT 在实际应用中更加高效和便捷。

5 结论

本文为混合基 FFT 的不同因式分解因子组合与对应的算法运算量进行了理论定量分析和实验验证，提出了建立获得混合基 FFT 的最小运算量的分解因子匹配库的构想，为混合基 FFT 在实际应用中通过对分解因子组合的选择获得最低运算复杂度的混合基 FFT 算法，为节省计算资源和实现高时效的低复杂度混合基 FFT 设计技术提供了一定的参考。

参考文献：

[1] 陈希信,孙俊,龙伟军. 脉冲多普勒雷达中补零 FFT 与折叠 FFT 的性能比较[J]. 数据采集与处理，2013,28(4):450-453. (CHEN Xixin,SUN Jun,LONG Weijun. The comparison of zero padding FFT and folding FFT about performance in the pulse Doppler radar[J]. Journal of Data Acquisition & Processing, 2013,28(4):450-453.)

[2] 平昭琪,李云焕,张理伟. 基-2/3 混合基 FFT 编程算法研究[J]. 科协论坛，2013(12):149-150. (PING Zhaoqi,LI Yunhuan,ZHANG Liwei. The research of mixed-radix FFT programming algorithm based on two and third[J]. Science & Technology Association Forum, 2013(12):149-150.)

[3] 张斌,孔敏,吴从兵. 基于窗函数下频谱泄露的研究[J]. 信息化纵横，2009(11):10-12. (ZHANG Bin,KONG Min,WU Congbing. The research of spectrum leakage based on window function[J]. Informationization, 2009(11):10-12.)

[4] 孙英侠,李亚利,宁宇鹏. 频谱分析原理及频谱分析仪使用技巧[J]. 国外电子测量技术，2014,33(7):76-80. (SUN Yingxia,LI Yali,NING Yupeng. The principle of spectrum analysis and using skills of spectrum analyzer[J]. Foreign Electronic Measurement Technology, 2014,33(7):76-80.)

[5] 李俊,叶松,董庆贺. Python 中函数图像快速绘制的方法[J]. 电子制作, 2014(4):69-70. (LI Jun,YE Song,DONG Qinghe. The fast drawing method of image by Python[J]. Practical Electronics, 2014(4):69-70.)

[6] 骆东佳,张丽彪. 基于 FFT 频谱分析的研究[J]. 电子制作，2015(5):34. (LUO Dongjia,ZHANG Libiao. The research based on FFT spectrum analysis[J]. Practical Electronics, 2015(5):34.)

[7] 侯绍胜,王顺庆. 素数与复合数的关系、正整数是素数的条件[J]. 西北民族学院学报(自然科学版)，2002,23(4):1-7. (HOU Shaosheng,WANG Shunqing. The relationship between prime numbers and the complex number, the condition of positive integer is a prime number[J]. Journal of Northwest Minorities University(Natural Science Edition), 2002,23(4):1-7.)

[8] 王非非,杜伟韬. 一种旋转因子访存优化的 FFT 算法[J]. 太赫兹科学与电子信息学报，2011,9(2):206-210. (WANG Feifei,DU Weitao. Optimized design of memory access for twiddle factors in FFT algorithm[J]. Journal of Terahertz Science & Electronic Information Technology, 2011,9(2):206-210.)

作者简介：

程志鹏(1992-)，男，江西省南昌市人，在读硕士研究生，主要研究方向为嵌入式系统及滤波算法.email:804612819@qq.com.

马　琪(1968-)，男，浙江省绍兴市人，博士，研究员，主要研究方向为嵌入式系统及集成电路.

竺红卫(1967-)，男，浙江省上虞市人，博士，副教授，主要研究方向为嵌入式系统及算法应用.