

文章编号: 2095-4980(2017)01-0098-06

分形分抗逼近电路零极点的数值求解与验证

易 舟, 袁 晓

(四川大学 电子信息学院, 四川 成都 610064)

摘 要: 随着分抗逼近电路理论的高速发展, 如何求解分抗电路的零极点是研究的重点问题之一。利用常规友矩阵求解分抗逼近电路的零极点, 出现虚根而得不到正确的解。为了解决这个问题, 基于分抗逼近电路的迭代电路和迭代矩阵, 利用矩阵实验室(MATLAB)中的"solve"和"roots"函数实现分抗逼近电路归一化零极点的数值求解, 并比较两者的精确度和运算速度。对求得的解进行直接验证和间接验证。仿真结果表明, 该方法实现了分抗逼近电路零极点的准确求解, 对于分抗逼近电路的分析具有指导性意义。

关键词: 分数阶微积分; 阻抗函数; 迭代矩阵; 根的验证; 矩阵实验室

中图分类号: TN98

文献标志码: A

doi: 10.11805/TKYDA201701.0098

Numerical solution and verification of zero-pole for some fractal fractance approximation circuits

YI Zhou, YUAN Xiao

(School of Electronics & Information Engineering, Sichuan University, Chengdu Sichuan 610064, China)

Abstract: With the development of the theory of fractance approximation circuits, one of the hot topics is how to solve the zero-pole of the circuits. The precise solution cannot be obtained by companion matrix. To solve the problem, based on the iterative circuit and iterative matrix, numerical solution of normalized zero-pole of fractance approximation circuit is achieved by two functions, "solve" and "roots", in Matrix Laboratory(MATLAB). The accuracy and speed of these two operations are compared. Then the zero-pole is verified by direct ways and indirect ways. The simulation results indicate that the accurate solution is obtained. The solution of zero-pole shows a guiding significance on analyzing the fractance approximation circuits.

Keywords: fractional calculus; impedance function; iterative matrix; roots checking; Matrix Laboratory

分抗逼近电路起源于分数阶微积分^[1], 分抗是电路中实现分数阶微积分运算的关键元器件。近年来, 新观点、新方法、新理论被广泛用于分抗逼近电路, 分抗逼近电路问题逐渐成为一个研究热点。自 19 世纪 70 年代, Oldham 用一类具有负半阶运算性能的 RC 链电路(Oldham I 型 RC 链电路)建模半阶积分电解析过程。根据 I 型电路^[2], II 型、III 型、IV 型 3 种 RC 链电路被陆续提出, 并根据这 4 种原型电路的极限阻抗函数的特点, 提出了 4 种改进型电路—Oldham I 型、II 型、III 型、IV 型链电路。在深入研究基础上, 发现早在 1964 年 Carlson 和 Halijak^[3-4]就提出了有限节对称格型(Lattice)RC 网络(桥分抗), 并从理论上证明该网络具有负半阶运算特性。自 2005 年以来, 蒲亦非^[5-8]提出 2 种更为复杂的具有自相似分形结构的无源负半阶分抗逼近电路—B 型、2h 型分抗逼近电路。与此同时, 迭代矩阵^[2]、迭代法^[2]等相关理论用于求分抗电路的阻抗函数。随着电路节次数 k ^[2] 逐渐增大, 电路越来越复杂, 其阻抗函数次数越来越高, 且阻抗函数的分子、分母多项式为超高次、无缺项、大差异系数多项式, 无法用 roots 求解其零极点。根据电路的稳定性, 电路的零极点应该在负实轴上, 常规友矩阵法求解的零极点出现错误的虚根。因而分抗逼近电路的零极点的求解是一个亟待解决的难题。本文在 MATLAB 中编程实现常见的分抗逼近电路零极点的数值求解, 并进行解的验证。

收稿日期: 2015-07-19; 修回日期: 2015-09-08

基金项目: 成都市科技计划资助项目(12DXYB255JH-002); 四川省科技支撑计划资助项目(2013SZ0071)

1 分抗逼近电路零极点求解和验证的难度

分抗逼近电路零极点零点、极点完全确定了分抗逼近电路的基本性质—频域特征与运算特征。由于阻抗函数的分子、分母系数矢量都是超高次的大差异系数无缺项多项式，对应的友矩阵的条件数^[9]很大。因此使用常规的友矩阵特征值法，会因求解特征值的迭代误差、系数表示的扰动以及机器精确度带来的累积误差而导致结果不准，在 MATLAB 中进行数值求解是困难的事情。Edelman^[10]考察了 8 个不同的无缺项 19 次多项式方程数值求解的相对误差问题，通过实验发现无缺项多项式的系数个数超过一定数值时，使用 roots 求解获得的根不准确。通过做实验可知当 $k=23$ ，利用常规方法进行 roots 求解出现虚根。故必须对阻抗函数多项式进行数学变换，将超高次无缺项大差异系数多项式方程—病态方程^[9]转换成在理论上或数值上易解的缺项小差异系数多项式方程—良态方程^[9]。

用迭代矩阵^[2]可以将病态方程转换为良态方程，这种转换会带来增根或失根，所以在编程中需要根据具体分抗逼近电路去掉增根并加上失根。由于误差的存在，将根代入原方程，得到的结果偏离 0，验根失效。不能采用常规的方法进行验根，本文另辟蹊径，对求得的根进行间接验证。选择初始阻抗，利用迭代法求出初始阻抗，以该初始阻抗作为标准，对比由程序计算出的零极点所构造的阻抗函数，画出 2 种函数的幅频、相频、阶频曲线^[2]，根据曲线的一致性来进行验根。

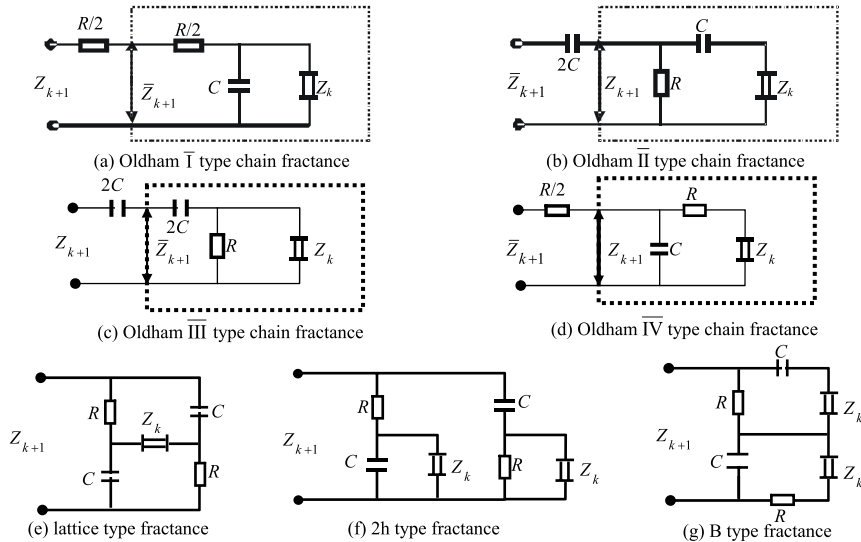


Fig.1 Simplified iterative circuits of chain fractance approximation circuits

图 1 常见分抗逼近电路的简化迭代电路

2 分抗逼近电路零极点求解过程

格型、B 型、2h 型和 4 种 Oldham 的改进型分抗逼近电路的简化电路模型^[2]如图 1 所示，具体电路详细参考相关文献。

原型电路与改进型电路的阻抗函数关系见表 1。

根据图 1 所示电路和表 1，为了求得改进型的阻抗函数，首先必须求得原型的阻抗函数。Oldham I 型阻抗函数 $Z_k(s)$ 可以由迭代公式

$$Z_k(s) = F(Z_{k-1}(s)) = a + \frac{bZ_{k-1}(s)}{b + Z_{k-1}(s)}, \quad a = R, b = 1/(Cs) \quad (1)$$

算出，式中迭代函数：

$$F(x) = a + \frac{bx}{b + x} \quad (2)$$

表 1 改进型与原型阻抗函数之间的关系

Table1 Relationship of impedance function between prototype and improved type

type	impedance function	remark
I	$\bar{Z}_k(s) = Z_k(s) - \frac{1}{2}R$	$Z_k(s)$ is for prototype $\bar{Z}_k(s)$ is for improved type
II	$\bar{Z}_k(s) = Z_k(s) + \frac{1}{2Cs}$	
III	$\bar{Z}_k(s) = Z_k(s) - \frac{1}{2Cs}$	
IV	$\bar{Z}_k(s) = Z_k(s) + \frac{1}{2}R$	

完全表征了 Oldham I 型电路的自相似分形结构特点, 令 $y = \frac{x}{R}$, $w = RCS$ 代入式(2):

$$F(x) = R \frac{1 + wy + y}{1 + wy} = R\bar{F}(y) \quad (3)$$

式中 $\bar{F}(y)$ 称为归一化迭代函数。令 $Y_k(w) = \bar{N}_k(w)/\bar{D}_k(w) = Z_k(s)/R$, $k \in N$, 代入 $\bar{F}(y)$ 可得:

$$Y_{k+1}(w) = \frac{\bar{N}_{k+1}(w)}{\bar{D}_{k+1}(w)} = \frac{(1+w)\bar{D}_k(w) + \bar{N}_k(w)}{\bar{D}_k(w) + w\bar{N}_k(w)} \quad (4)$$

将式(4)写成矩阵形式为:

$$\begin{bmatrix} \bar{N}_{k+1}(w) \\ \bar{D}_{k+1}(w) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+w & 1 \\ w & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{N}_k(w) \\ \bar{D}_k(w) \end{bmatrix} = \mathbf{F} \begin{bmatrix} \bar{N}_k(w) \\ \bar{D}_k(w) \end{bmatrix} = \mathbf{F}^{k+1} \begin{bmatrix} \bar{N}_0(w) \\ \bar{D}_0(w) \end{bmatrix} \quad (5)$$

式中 $\mathbf{F}$ 称为迭代矩阵。现将 7 种电路的数学描述归纳见表 2。

表 2 七种分抗逼近电路的数学描述
Table2 Math expressions of chain fractance approximation circuits

type	iterative function		iterative matrix $\mathbf{F}$	relation of $w-\lambda$	remark
	$F(x)$	$\bar{F}(y)$			
I	$a + \frac{bx}{b+x}$	$\frac{1+wy+y}{1+wy}$	$\begin{bmatrix} 1+w & 1 \\ w & 1 \end{bmatrix}$	$w = (\lambda - 1)^2 / \lambda$	
II	$\frac{a(b+x)}{a+b+x}$	$\frac{1+wy}{1+w+wy}$	$w \begin{bmatrix} 1 & 1/w \\ 1 & 1+1/w \end{bmatrix}$	$w = \lambda / (\lambda - 1)^2$	
III	$b + \frac{ax}{a+x}$	$\frac{1+y+wy}{w+wy}$	$w \begin{bmatrix} 1+1/w & 1/w \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	$w = \lambda / (\lambda - 1)^2$	$a = R$ $b = \frac{1}{Cs}$
IV	$\frac{b(a+x)}{a+b+x}$	$\frac{1+y}{1+w+wy}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1+w & w \end{bmatrix}$	$w = (\lambda - 1)^2 / \lambda$	$w = RCS$ λ is eigenvalue of $\mathbf{F}$
lattice type	$\frac{2ab+(a+b)x}{a+b+2x}$	$\frac{2+(1+w)y}{1+w+2wy}$	$\begin{bmatrix} 1+w & 2 \\ 2w & 1+w \end{bmatrix}$	$\lambda = (\sqrt{w} \pm 1)^2$	
B type	$\frac{2ab+(a+b)x}{a+b+x}$	$\frac{2+(1+w)y}{1+w+wy}$	$\begin{bmatrix} 1+w & 2 \\ w & 1+w \end{bmatrix}$	$\lambda = (w+1) \pm \sqrt{2w}$	
2h type	$\frac{ab+(a+b)x}{a+b+2x}$	$\frac{1+(1+w)y}{1+w+2wy}$	$\begin{bmatrix} 1+w & 1 \\ 2w & 1+w \end{bmatrix}$	$\lambda = (w+1) \pm \sqrt{2w}$	

采用特征值分解与 Hamilton-Cayley 展开 2 种方法可以求得迭代矩阵幂 $\mathbf{F}^k$,

$$\mathbf{F}^k = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda}^k \mathbf{U}^{-1} = \frac{1}{g_k(\lambda)} \begin{bmatrix} \bar{\gamma}_k & \bar{\delta}_k \\ \bar{\varepsilon}_k & \bar{\zeta}_k \end{bmatrix} = \frac{1}{(\lambda+1)\lambda^k} \begin{bmatrix} \lambda^{2k+1} + 1 & \lambda(\lambda^{2k} - 1)/(\lambda - 1) \\ (\lambda - 1)(\lambda^{2k} - 1) & \lambda^{2k} + \lambda \end{bmatrix} \quad (6)$$

设初始阻抗 $Z_0(s)$ 如下:

$$Z_0(s) = lR + q/(Cs) = R(l + q/(RCs)), \quad (0 \leq l \leq \infty, \quad 0 \leq q < \infty) \quad (7)$$

式中 l, q 为初始阻抗系数。代入 $w = RCS$, $w = (\lambda - 1)^2 / \lambda$, 有:

$$\tilde{Y}_0(\lambda) = \frac{\tilde{N}_0(\lambda)}{\tilde{D}_0(\lambda)} = l + q\lambda / (\lambda - 1)^2 = Y_0(w) \quad (8)$$

将式(8)写成矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} \tilde{N}_0(\lambda) \\ \tilde{D}_0(\lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l + q\lambda / (\lambda - 1)^2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

由式(7)、式(9)可得:

$$Y_k(w(\lambda)) = \tilde{Y}_k(\lambda) = \frac{\tilde{N}_k(\lambda)}{\tilde{D}_k(\lambda)} = \frac{\bar{\gamma}_k(\lambda)\tilde{N}_0(\lambda) + \bar{\delta}_k(\lambda)\tilde{D}_0(\lambda)}{\bar{\varepsilon}_k(\lambda)\tilde{N}_0(\lambda) + \bar{\zeta}_k(\lambda)\tilde{D}_0(\lambda)} \quad (10)$$

由式(10)可得 Oldham I 型的归一化阻抗函数 $\tilde{Y}_k(\lambda)$:

$$\tilde{Y}_k(\lambda) = \frac{l\lambda^{2k+3} + (1+q-2l)\lambda^{2k+2} + (l-1)\lambda^{2k+1} + (l-1)\lambda^2 + (1+q-2l)\lambda + l}{(\lambda-1)(l\lambda^{2k+2} + (1-2l+q)\lambda^{2k+1} + (l-1)\lambda^{2k} + (l-1)\lambda^2 + (2l-1-q)\lambda - l)} \quad (11)$$

则 Oldham $\bar{\text{I}}$ 型的归一化阻抗函数可以根据式(12)求解出来:

$$\tilde{Y}_{\bar{\text{I}}}(\lambda) = \tilde{Y}_k(\lambda) - \frac{1}{2} \quad (12)$$

按照上述方法可以求出其他类型的分抗逼近电路的阻抗函数表达式, 并将其归纳入表 3、表 4。

表 3 改进型阻抗函数表达式

Table3 Math expressions of improved types

type	impedance function	$\tilde{Y}_k(\lambda) = \frac{\tilde{N}_k(\lambda)}{\tilde{D}_k(\lambda)}$	remark
$\bar{\text{I}}$	$\tilde{N}_k(\lambda)$	$l\lambda^{2k+3} + (1+q-l)\lambda^{2k+2} + (q-l)\lambda^{2k+1} + (l-1)\lambda^{2k} + (l-1)\lambda^3 + (q-l)\lambda^2 + (1+q-l)\lambda + l$	$w = \lambda + 1/\lambda - 2$
	$\tilde{D}_k(\lambda)$	$2(\lambda-1)(l\lambda^{2k+2} + (1-2l+q)\lambda^{2k+1} + (l-1)\lambda^{2k} + (l-1)\lambda^2 + (2l-1-q)\lambda - l)$	
$\bar{\text{II}}$	$\tilde{N}_k(\lambda)$	$(\lambda-1)((q+1)\lambda^{2k+3} + (l-q)\lambda^{2k+2} + (l-q-1)\lambda^{2k+1} + q\lambda^{2k} + q\lambda^3 + (l-q-1)\lambda^2 + (l-q)\lambda + q + 1)$	$\frac{1}{w} = \lambda + \frac{1}{\lambda} - 2$
	$\tilde{D}_k(\lambda)$	$2((1+q)\lambda^{2k+2} + (l-2q-1)\lambda^{2k+1} + q\lambda^{2k} - q\lambda^2 + (1+2q-l)\lambda - (q+1))$	
$\bar{\text{III}}$	$\tilde{N}_k(\lambda)$	$(\lambda-1)(q\lambda^{2k+3} + (1+l-q)\lambda^{2k+2} + (l-q)\lambda^{2k+1} + (q-1)\lambda^{2k} + (q-1)\lambda^3 + (l-q)\lambda^2 + (1+l-q)\lambda + q)$	$\frac{1}{w} = \lambda + \frac{1}{\lambda} - 2$
	$\tilde{D}_k(\lambda)$	$2(q\lambda^{2k+2} + (1+l-2q)\lambda^{2k+1} + (q-1)\lambda^{2k} + (1-q)\lambda^2 + (2q-l-1)\lambda - q)$	
$\bar{\text{IV}}$	$\tilde{N}_k(\lambda)$	$(1+l)\lambda^{2k+2} + (q-l)\lambda^{2k+2} + (q-1-l)\lambda^{2k+1} + l\lambda^{2k} + l\lambda^3 + (q-1-l)\lambda^2 + (q-l)\lambda + (1+l)$	$w = \lambda + 1/\lambda - 2$
	$\tilde{D}_k(\lambda)$	$2(\lambda-1)((1+l)\lambda^{2k+2} + (q-2l-1)\lambda^{2k+1} + l\lambda^{2k} - l\lambda^2 + (1+2l-q)\lambda - (l+1))$	

表 4 格型, B 型, 2h 型阻抗函数表达式

Table4 Math expressions of impedance function for lattice, B and 2h types

type	impedance function	$\bar{Z}_k(\theta) = \frac{\bar{N}_k(\theta)}{\bar{D}_k(\theta)}$	remark
B	$\bar{N}_k(\theta)$	$q(\lambda_1^k + \lambda_2^k) + lw(\lambda_1^k + \lambda_2^k) + \sqrt{2w}(\lambda_1^k - \lambda_2^k)$	$\theta = \sqrt{2w}$ $\lambda_{1,2} = (\theta^2/2 + 1) \pm \theta$
	$\bar{D}_k(\theta)$	$q\sqrt{w}(\lambda_1^k - \lambda_2^k) / \sqrt{2} + lw\sqrt{w}(\lambda_1^k - \lambda_2^k) + w(\lambda_1^k + \lambda_2^k)$	
lattice	$\bar{N}_k(\theta)$	$q(\lambda_1^k + \lambda_2^k) + lw(\lambda_1^k + \lambda_2^k) + \sqrt{w}(\lambda_1^k - \lambda_2^k)$	$\theta = \sqrt{w}$ $\lambda_{1,2} = (\theta \pm 1)^2$
	$\bar{D}_k(\theta)$	$q\sqrt{w}(\lambda_1^k - \lambda_2^k) + lw\sqrt{w}(\lambda_1^k - \lambda_2^k) + w(\lambda_1^k + \lambda_2^k)$	
2h	$\bar{N}_k(\theta)$	$q(\lambda_1^k + \lambda_2^k) + lw(\lambda_1^k + \lambda_2^k) + \sqrt{w/2}(\lambda_1^k - \lambda_2^k)$	$\theta = \sqrt{2w}$ $\lambda_{1,2} = (\theta^2/2 + 1) \pm \theta$
	$\bar{D}_k(\theta)$	$q\sqrt{2w}(\lambda_1^k - \lambda_2^k) + lw\sqrt{w}(\lambda_1^k - \lambda_2^k) + w(\lambda_1^k + \lambda_2^k)$	

变量代换后得到的 $\tilde{N}_k(\lambda)$, $\tilde{D}_k(\lambda)$, $\bar{N}_k(\theta)$, $\bar{D}_k(\theta)$ 为大缺项、小差异系数的良态多项式, 对应的友矩阵为实数元素的稀疏矩阵。从而可以使用 roots 和 solve 等函数求解, 这是数值求解的理论基础。其程序流程图如图 2 所示。

MATLAB 中可以用 roots 或 solve 函数来求解多项式的根。以 Oldham $\bar{\text{I}}$ 型分抗为例来说明求解过程。首先定义符号变量: syms lamda, 并按照表 2 中的表达式写出分子 N_k 、分母多项式 D_k 。

若用 roots 函数求根, 其输入系数为多项式的系数矢量且为降幂排列, 故需利用 sym2poly 函数得到多项式的系数矢量。 $a = \text{sym2poly}(N_k)$, $b = \text{sym2poly}(D_k)$, 然后用 roots 函数求根: $\text{zero} = \text{roots}(a)$, $\text{pole} = \text{roots}(b)$ 。

如果利用 solve 函数求解, 则 solve(N_k) 和 solve(D_k) 即可求出多项式的根。求出的解为符号表达式, 故需利用 eval 函数将符号表达式转换为数值。

表 5 列出了用 2 种方法求解 Oldham $\bar{\text{I}}$ 型分抗的结果 ($l=1$,

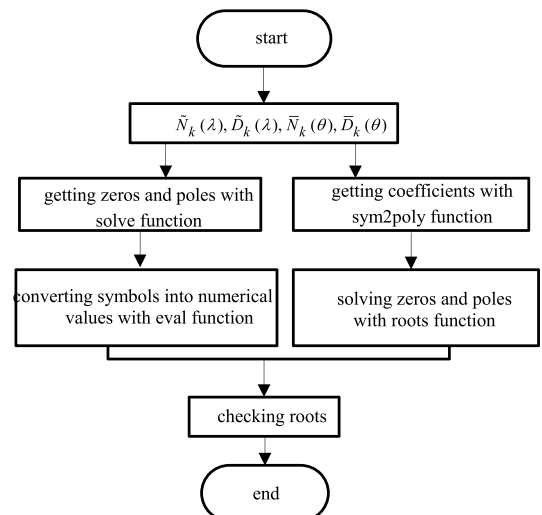


Fig.2 Program flow chart
图 2 程序流程图

$q=0, k=5$)。数据说明了 solve 函数求解精确度高于 roots。

表 6 列出了不同级次数 k ，利用 2 个函数求解 50 次所需要的平均时间($l=0, q=0$)。表 6 的数据说明 roots 函数求解零极点速度快于 solve 函数。

表 5 solve 函数，roots 函数求解结果
Table5 Solutions of function solve and roots

	solve	roots
zero	-0.317 492 934 337 638	-0.317 492 934 337 638 + 0.000 000 000 000 000 i
	-1.169 169 973 996 227	-1.169 169 973 996 227 + 0.000 000 000 000 001 i
	-2.284 629 676 546 570	-2.284 629 676 546 570 + 0.000 000 000 000 001 i
	-3.309 721 467 890 570	-3.309 721 467 890 570 + 0.000 000 000 000 001 i
pole	-3.918 985 947 228 995	-3.918 985 947 228 995 - 0.000 000 000 000 000 i
	-0.081 014 052 771 005	-0.081 014 052 771 005 + 0.000 000 000 000 001 i
	-0.690 278 532 109 430	-0.690 278 532 109 430 - 0.000 000 000 000 001 i
	-1.715 370 323 453 430	-1.715 370 323 453 431 + 0.000 000 000 000 002 i
	-2.830 830 026 003 773	-2.830 830 026 003 773 + 0.000 000 000 000 001 i
	-3.682 507 065 662 362	-3.682 507 065 662 362 - 0.000 000 000 000 000 i

表 6 时间比较
Table6 Comparison of running time

level	time of solve/s	time of roots/s
$k=10$	0.235 548 818 621 983	0.047 129 798 894 553
$k=20$	0.445 525 450 765 384	0.051 036 632 081 870
$k=40$	5.329 982 431 907 816	0.086 325 039 256 744
$k=80$	16.754 072 316 398 750	0.245 575 473 940 930
$k=160$	37.245 933 704 000 507	1.361 761 359 632 579

3 根的验证

以 Oldham $\bar{\Gamma}$ 型分抗逼近电路为例，来说明解的验证。

3.1 直接验证

因为采用常规验根方法^[9]—验算 $\bar{N}_k(\bar{z}_{ki})=0, \bar{D}_k(\bar{p}_{ki})=0$ ，系数表示的扰动以及机器精确度带来的累积误差会使得验根失效— $\bar{N}_k(\bar{z}_{ki})$ 与 $\bar{D}_k(\bar{p}_{ki})$ 远远偏离 0。

为了便于观察直接验根的困难，画出归一化阻抗函数的分子多项式方程 $\bar{N}_k(w)$ 的曲线，曲线与 x 轴的交点就是方程的根，再在该坐标轴内标出上节方法求解出的零极点 $\bar{z}_{ki}$ 的位置(用圆圈表示)，观察两者的位置关系即可得到相关信息($l=1, q=0, k=23$)。

由图 3 中曲线的走势和尖锐程度可得，由于系数表示扰动，机器精确度等累积误差导致系数矢量求解不准，这是直接验根困难的主要原因。随着 k 的增加，直接进行零极点验证更加困难。所以本文采用间接验证的方法进行验根。

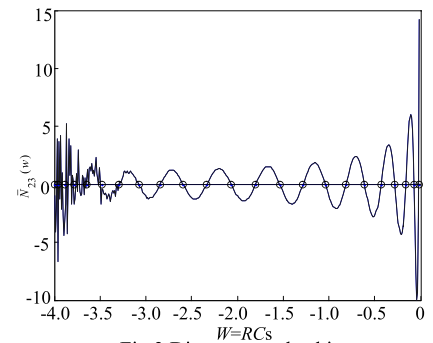


Fig.3 Direct roots checking
图 3 直接验根

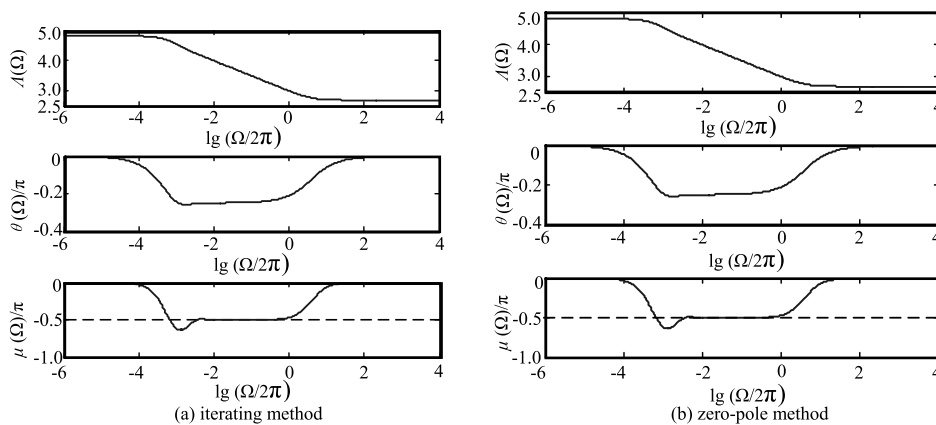


Fig.4 Indirect roots checking
图 4 间接验根

3.2 间接验证

选取初始阻抗 $Z_0(j\Omega)=R$ ，根据迭代方程 $Z_k(j\Omega)=R+\frac{Z_{k-1}(j\Omega)}{1+j\Omega CZ_{k-1}(j\Omega)}$ 和 $\bar{Z}_k(j\Omega)=Z_k(j\Omega)-\frac{1}{2}R$ 求出 $\bar{Z}_k(j\Omega)$ 。以此

求出的为标准, 对比由程序计算出的零极点构造的阻抗函数 $H_k(j\Omega) = R \frac{\prod_{i=0}^{n_k} (j\Omega - \bar{z}_{ki})}{\prod_{i=0}^{d_k} (j\Omega - \bar{p}_{ki})}$, $k \in Z$ 。仿真实验结果表明

$\bar{Z}_k(j\Omega) \approx H_k(j\Omega)$, 2 种方法得到的幅频、相频、阶频曲线如图 4 所示 ($l=1, q=0, k=64$)。

由图 4 可知, 2 种方法画出的曲线是一致的, 故编程求出的零极点是正确的。

4 结论

本文根据迭代矩阵求出的阻抗函数表达式, 利用 MATLAB 实现了 7 种分抗逼近电路归一化零极点的数值求解。本文论述并解决的一些零极点求解问题, 为人们提供了值得借鉴的研究范例。这些思想与方法完全可以推广到类似的高次方程求根问题, 特别是那些具有一定物理、电路、数学等约束问题的求根。本文所采用的方法可以推广到其他分抗逼近电路, 如何寻找出一套适用于所有分抗逼近电路的零极点求解方法, 高次方程求根以及验根的问题值得进行后续研究。

参考文献:

- [1] 黄晓晴, 于盛林. 分数微积分用于分形压缩图像嵌入灰度水印[J]. 太赫兹科学与电子信息学报, 2010, 8(6): 702-707. (HUANG Xiaoqing, YU Shenglin. Fractional calculus used to embed gray scale watermark in fractal compression image[J]. Journal of Terahertz Science and Electronic Information Technology, 2010, 8(6): 702-707.)
- [2] 袁晓. 分抗逼近电路之数学原理[M]. 北京: 科学出版社, 2015. (YUAN Xiao. Mathematical Principles of Fractance Approximation Circuits[M]. Beijing: Science Press, 2015.)
- [3] CARLSON G E, HALIJAK C A. Approximation of fractional capacitors $(1/s)^{1/n}$ by a regular Newton processes[J]. IEEE Trans. on Circuit Theory, 1964, CT-11(2): 210-213.
- [4] DUTTA Roy S C, SHRNOI B A. Distributed and lumped RC realizations of a constant-argument impedance[J]. J. Franklin Inst., 1966(282): 318-329.
- [5] PU Y F, YUAN X, LIAO K, et al. A recursive net-grid-type analog fractance circuit for any order fractional calculus[J]. Proc. of IEEE International Conference on Mechatronics and Automation, 2005(3): 1375-1380.
- [6] PU Yifei, YUAN Xiao, LIAO Ke, et al. Structuring analog fractance circuit for 1/2 order fractional calculus[J]. Proceedings of ASICON, 2005(2): 1136-1139.
- [7] PU Yifei, YUAN Xiao, LIAO Ke, et al. Implement any fractional order multiplayer dynamics associative neural network[J]. Proceedings of ASICON, 2005(2): 789-793.
- [8] PU Yifei, YUAN Xiao, LIAO K, et al. A recursive two-circuits series analog fractance circuit for any order fractional calculus[J]. Proceedings of SPIE-The International Society for Optical Engineering, 2006(6027): 509-519.
- [9] 《数学辞海》编辑委员会. 数学辞海[M]. 太原: 山西教育出版社, 2002. (Editorial Committee of Mathematics Dictionary. Mathematics Dictionary[M]. Taiyuan, China: Shanxi Education Press, 2002.)
- [10] ALAN Edelman, MURAKAMI H. Polynomial roots from companion matrix eigenvalues[J]. Mathematics of Computation, 1995, 64(210): 763-776.

作者简介:



易 舟(1990-), 男, 湖北省天门市人, 在读硕士研究生, 主要研究方向为信号与信息处理和分抗逼近电路零极点求解. email: 1083753113@qq.com.

袁 晓(1964-), 男, 四川省中江县人, 博士, 副教授, 目前主要从事现代信号处理的理论和应用(特别是分数阶数字滤波器理论与设计、分数阶微积分在图像信号分析与处理中应用)、分数阶电路与系统理论(特别是分抗逼近电路的数学原理)等研究.