文章编号：2095-4980(2017)03-0388-07

干扰环境下 MIMO 雷达波形与接收滤波联合优化算法

李玉翔[1]，胡捍英[1]，赵智昊[1]，李海文[1,2]

(1.信息工程大学 导航与空天目标工程学院，河南 郑州 450002；2.重庆通信学院，重庆 404100)

摘　要：传统雷达一般采用固定的发射波形，在干扰环境下很难获得最优的目标检测性能。针对这一问题，利用集中式多输入多输出(MIMO)雷达波形分集的优势，提出了一种干扰环境下的MIMO雷达波形与接收滤波联合优化算法。以最大化输出信干噪比为准则，使发射波形满足恒模条件，同时施加波形与具备较好脉压特性雷达波形之间的相似性约束，建立了有限相位发射波形与接收滤波权值的优化模型。然后，在循环迭代的算法框架下，将优化问题分解为2个子优化问题，并分别采用拉格朗日乘子法、半正定松弛技术对子优化问题求解，得到发射波形与接收滤波权值的联合优化结果。仿真结果表明，所提算法较现有方法相比有更高的输出信干噪比，使干扰信号的抑制性能得到改善，同时可兼顾发射波形的脉冲压缩特性。

关键词：多输入多输出雷达；干扰抑制；波形设计；相似约束

中图分类号：TN957.51　　**文献标志码：**A　　**doi：**10.11805/TKYDA201703.0388

Joint optimization algorithm of waveform and receiving filter for MIMO radar in the presence of interference

LI Yuxiang[1], HU Hanying[1], ZHAO Zhihao[1], LI Haiwen[1,2]

(1.School of Navigation and Space Target Engineering, Information Engineering University, Zhengzhou Henan 450002, China;
2.Chongqing Institute of Communications, Chongqing 404100, China)

Abstract: Conventional radar generally uses fixed transmit waveform, which is difficult to obtain optimal target detection performance in the presence of interference. To solve this problem, a joint optimization algorithm of waveform and receiving filter for Multiple-Input Multiple-Output(MIMO) radar is proposed. Firstly, output signal to interference and noise ratio maximization is used as objective function. By setting transmit waveform to satisfy constant modulus constraint, the joint optimization model of waveform and receiving filter is established under a similarity constraint involving a reference radar waveform. Then, under the framework of cyclic iterative algorithm, the joint optimization problem is decomposed into two sub-optimization problems, which are solved by using Lagrange multiplier method and semi-definite relaxation technique respectively. The proposed joint optimization algorithm finally results in transmit waveform and receiving filter weights. Simulation results show that the proposed method has higher output signal-to-noise ratio than the existing methods, and achieves better interference suppression performance with an eye to pulse compression property of the transmit waveform.

Keywords: Multiple-Input Multiple-Output radar; interference suppression; waveform design; similarity constraint

多输入多输出(MIMO)雷达[1]作为一种新体制雷达，在参数估计及目标检测等方面有较好的性能优势。MIMO雷达根据阵元配置的不同，可分为分布式 MIMO 雷达[2-4]和集中式 MIMO 雷达[5-7]。分布式 MIMO 雷达的阵元间距较大，能缓解由目标截面积闪烁引起的探测性能下降问题。集中式 MIMO 雷达收发阵元的间距较小，可以发挥波形分集的优势，获得更好的雷达系统性能。传统雷达一般采用固定发射波形，因此在干扰环境下很难获得最优的目标检测结果。与传统雷达相比，认知 MIMO 雷达技术[8-9]可以充分利用雷达工作环境中的先验信息，自适应地改变其发射波形及接收端信号处理方法，来提升雷达系统对干扰信号的抑制能力。

收稿日期：2016-11-21；**修回日期：**2016-12-09
基金项目：国家自然科学基金资助项目(41301481)

针对 MIMO 雷达工作的背景环境自适应设计发射波形成为当前的研究热点之一。文献[10–11]以互信息为准则，分别提出了白噪声、色噪声背景下的 MIMO 雷达最优波形设计方法，并分析了最优发射波形与目标以及噪声之间的关联。文献[12]以目标散射系数的最小均方根误差(Minimum Mean Square Error，MMSE)为准则来设计发射波形，给出了杂波条件下 MIMO 雷达的波形优化算法。以上方法由于均没有考虑 MIMO 雷达在干扰信号环境下的波形设计问题，当存在干扰时将导致系统的输出信干噪比(Signal to Interference plus Noise Ratio，SINR)降低，从而影响雷达的目标检测性能。

文献[13]提出了在强干扰环境下的 MIMO 雷达发射波形设计算法，同时引入恒模约束条件，使每个阵元的发射波形都能满足恒定包络特性。但是优化波形的脉冲压缩特性无法得到控制，不利于提高雷达对目标的距离分辨力。文献[14]考虑波形相似性约束设计了单天线雷达的波形优化算法，通过相似性约束控制与期望波形(参考波形)的相关性，改善了波形的脉压能力，然而该方法无法直接应用到多阵元 MIMO 雷达系统中。文献[15]考虑满足相似约束条件的 MIMO 雷达发射波形设计问题，提出了 2 种序列优化算法，其缺点在于无法确保可以获得优化模型的可行解，而且没有考虑恒模发射波形相位取值为非有限集时的工程实现问题。

针对上述问题，本文以集中式 MIMO 雷达为应用背景，提出了一种干扰环境下的 MIMO 雷达波形与接收滤波联合优化算法。

1　信号模型

考虑发射阵元为 M_{t}，接收阵元为 M_{r} 的单基地 MIMO 雷达，阵元间距分别为 d_{t} 和 d_{r}。假设目标位于远场，目标到达阵列的距离远大于阵列孔径，收发阵列对目标的观测角相同。记第 n 时刻各阵元的基带发射信号为 $\boldsymbol{s}(n)=\left[s_1(n),s_2(n),\cdots,s_{M_{\mathrm{t}}}(n)\right]^{\mathrm{T}}$，其中 $n=1,2,\cdots,N$，N 表示发射波形的编码长度，则 MIMO 雷达总的发射信号矩阵可表示为 $\boldsymbol{S}=\left[\boldsymbol{s}(1),\boldsymbol{s}(2),\cdots,\boldsymbol{s}(N)\right]\in\boldsymbol{C}^{M_{\mathrm{t}}\times N}$。在空间 θ 方向处的雷达辐射信号可表示为 $\boldsymbol{x}(\theta)=\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}(\theta)\boldsymbol{S}$，$\boldsymbol{a}(\theta)=\left[1,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi d_{\mathrm{t}}\frac{\sin\theta}{\lambda}},\cdots,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi(M_{\mathrm{t}}-1)d_{\mathrm{t}}\frac{\sin\theta}{\lambda}}\right]^{\mathrm{T}}$ 表示 $M_{\mathrm{t}}\times 1$ 维的发射导向矢量，λ 为波长。

假设感兴趣的空域中存在 1 个目标散射点(点目标)及 K 个干扰散射点，则 MIMO 雷达接收阵元收到的基带信号为所有散射点的回波之和，即 $\boldsymbol{y}(n)=\alpha_0\boldsymbol{b}(\theta_0)\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}(\theta_0)\boldsymbol{s}(n)+\sum_{k=1}^{K}\alpha_k\boldsymbol{b}(\theta_k)\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}(\theta_k)\boldsymbol{s}(n)+\boldsymbol{v}(n)$。其中 α_0，θ_0 分别表示目标的散射系数和到达角；α_k，θ_k 分别表示第 k 个（$k=1,2,\cdots,K$）干扰散射点的散射系数和到达角；$\boldsymbol{b}(\theta)=[1,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi d_{\mathrm{r}}\frac{\sin\theta}{\lambda}},\cdots,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi(M_{\mathrm{r}}-1)d_{\mathrm{r}}\frac{\sin\theta}{\lambda}}]^{\mathrm{T}}$ 为接收导向矢量；$\boldsymbol{v}(n)$ 表示 $M_{\mathrm{r}}\times 1$ 维均值为 $\boldsymbol{0}$，协方差矩阵为 $\sigma_n^2\boldsymbol{I}$ 复高斯白噪声。将接收信号 $\boldsymbol{y}(n)$ 写成矩阵的形式，可得 $\boldsymbol{Y}=\alpha_0\boldsymbol{b}(\theta_0)\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}(\theta_0)\boldsymbol{S}+\sum_{k=1}^{K}\alpha_k\boldsymbol{b}(\theta_k)\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}(\theta_k)\boldsymbol{S}+\boldsymbol{V}$。其中 $\boldsymbol{Y}=[\boldsymbol{y}(1),\boldsymbol{y}(2),\cdots,\boldsymbol{y}(N)]_{M_{\mathrm{r}}\times N}$；$\boldsymbol{V}=[\boldsymbol{v}(1),\boldsymbol{v}(2),\cdots,\boldsymbol{v}(N)]_{M_{\mathrm{r}}\times N}$。利用等式 $\mathrm{vec}(\boldsymbol{AXB})=(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{A})\mathrm{vec}(\boldsymbol{X})$ 的性质[13]，将雷达回波矩阵 $\boldsymbol{Y}$ 按列堆积成维数为 $M_{\mathrm{r}}N\times 1$ 的列向量，则有 $\boldsymbol{y}=\mathrm{vec}(\boldsymbol{Y})=\alpha_0\boldsymbol{A}(\theta_0)\boldsymbol{s}+\sum_{k=1}^{K}\alpha_k\boldsymbol{A}(\theta_k)\boldsymbol{s}+\boldsymbol{v}$。其中 $\boldsymbol{A}(\theta)=\boldsymbol{I}_N\otimes(\boldsymbol{b}(\theta)\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}(\theta))$；$\boldsymbol{s}=\mathrm{vec}(\boldsymbol{S})$，$\mathrm{vec}(\bullet)$ 表示将矩阵按列堆积成列向量操作；$\boldsymbol{v}=\mathrm{vec}(\boldsymbol{V})$。

2　联合优化算法

2.1 目标函数的建立

在 MIMO 雷达目标检测中，输出信干噪比 SINR 对检测概率有很大影响，因此 SINR 是衡量雷达系统性能的重要指标。本文采用输出 SINR 作为 MIMO 雷达的波形设计准则，将接收机滤波器的权值记为 $\boldsymbol{w}$，经过接收滤波后的信号输出可以表示为 $r=\boldsymbol{w}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{y}=\alpha_0\boldsymbol{w}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}(\theta_0)\boldsymbol{s}+\boldsymbol{w}^{\mathrm{H}}\sum_{k=1}^{K}\alpha_k\boldsymbol{A}(\theta_k)\boldsymbol{s}+\boldsymbol{w}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{v}$。根据 SINR 的定义，可得 MIMO 雷达系统的输出 SINR 表达式：

$$R_{\mathrm{SIN}}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{w})=\frac{E\left\{\left|\alpha_0\boldsymbol{w}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}(\theta_0)\boldsymbol{s}\right|^2\right\}}{E\left\{\left|\boldsymbol{w}^{\mathrm{H}}\sum_{k=1}^{K}\alpha_k\boldsymbol{A}(\theta_k)\boldsymbol{s}\right|^2\right\}+\sigma_n^2\boldsymbol{w}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{w}} \tag{1}$$

令 $\sigma = E\{|\alpha_0|^2\}/\sigma_n^2$ ， $\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{s}) = \sum_{k=1}^{K} I_k \boldsymbol{A}(\theta_k)\boldsymbol{s}\boldsymbol{s}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}(\theta_k)$ ， $I_k = E\{|\alpha_k|^2\}/\sigma_n^2$ ，则最大化输出 SINR 的目标函数可写为：

$$\max_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{w}} \ R_{\mathrm{SIN}}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{w}) = \frac{\sigma\left|\boldsymbol{w}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}(\theta_0)\boldsymbol{s}\right|^2}{\boldsymbol{w}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{s})\boldsymbol{w} + \boldsymbol{w}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{w}} \tag{2}$$

从式(2)可以看出，MIMO 雷达的输出 SINR 依赖于接收滤波权值 $\boldsymbol{w}$ 以及发射波形 $\boldsymbol{s}$ 。为使得 SINR 最大，需要联合优化发射波形 $\boldsymbol{s}$ 以及接收滤波权值 $\boldsymbol{w}$ 。

在实际雷达系统中，还需要考虑发射波形 $\boldsymbol{s}$ 的约束限制条件。为了使发射机工作在饱和状态发挥最大效能，同时避免放大器的非线性特性导致发射波形失真，通常要求发射波形具有恒模。恒模波形的一般形式为 $s(n) = (1/\sqrt{M_{\mathrm{t}}N})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_n}$, $n = 1,2,\cdots,M_{\mathrm{t}}N$ ， φ_n 为波形 $s(n)$ 的相位。此外，MIMO 雷达波形一般还需要满足较好的脉冲压缩能力，从而提高目标的分辨力。为获得较好的脉压性能，可将已知具备较好脉压性能的雷达波形作为期望波形，使目标波形来逼近期望波形的脉压特性。具体地，假定期望波形为 $\boldsymbol{s}_0$ ，即要求发射波形 $\boldsymbol{s}$ 满足[14]

$$\left\|\boldsymbol{s} - \boldsymbol{s}_0\right\|_\infty \leqslant \varepsilon \tag{3}$$

式中： $\|\bullet\|_\infty$ 表示向量的 l_∞ 范数； ε ($0 \leqslant \varepsilon \leqslant 2$)为相似参数，它决定着发射波形与期望波形间的相关程度。根据文献[14]可知，当 $\varepsilon = 0$ 时，发射波形 $\boldsymbol{s}$ 与期望波形完全相同；当 $\varepsilon = 2$ 时，可视为波形 $\boldsymbol{s}$ 与期望波形的相似约束条件不起作用。当要求波形满足上述相似约束条件时，发射波形 $s(n)$ 的相位 φ_n 不再是任意的，波形的相似约束可以等价表示为[15]：

$$\varphi_n = \arg\ s(n) \in [\gamma_n, \gamma_n + \delta], \quad n = 1,2,\cdots,M_{\mathrm{t}}N \tag{4}$$

式中： $\gamma_n = \arg s_0(n) - \arccos(1 - \varepsilon^2/2)$ ； $\delta = 2\arccos(1 - \varepsilon^2/2)$ 。可以看出，波形的相似约束使得相位 φ_n 必须在区间 $[\gamma_n, \gamma_n + \delta]$ 取值。考虑到实际雷达系统中，在区间 $[\gamma_n, \gamma_n + \delta]$ 内相位取值为非有限集时，仍会使发射端信号产生变得困难。因此，本文考虑对发射波形的相位进行进一步量化。假设 L 为量化位数，则量化后的恒模波形满足： $s(n) \in \frac{1}{\sqrt{M_t N}}\left\{\mathrm{e}^{\mathrm{j}(2\pi\mu_n/L)}, \mathrm{e}^{\mathrm{j}(2\pi 9\mu_n + 1)/L)}, \cdots, \mathrm{e}^{\mathrm{j}(2\pi(\mu_n + \delta_d - 1)/L)}\right\}$, $n = 1,2,\cdots,M_{\mathrm{t}}N$ 。其中 $\mu_n = L \times \arg s_0(n)/2\pi - \left\lfloor L \cdot \arccos(1 - \varepsilon^2/2)/2\pi \right\rfloor$ ， $\delta_d = \begin{cases} 1 + 2\left\lfloor L \cdot \arccos(1 - \varepsilon^2/2)/2\pi \right\rfloor, & \varepsilon \in [0,2) \\ M, & \varepsilon = 2 \end{cases}$ ，符号 $\lfloor \bullet \rfloor$ 表示向下取整运算。考虑到对发射波形施加相似约束，则式(4)的约束条件相应地转化为：

$$\varphi_n = \arg\ s(n) \in [\mu_n, \mu_n + 1, \cdots, \mu_n + \delta_d - 1] \tag{5}$$

综上，以系统输出 SINR 为波形设计的目标函数，将包络恒定以及与期望波形相似作为约束条件，同时考虑波形的相位从有限集中取值，本文建立 MIMO 雷达发射波形 $\boldsymbol{s}$ 与接收滤波权值 $\boldsymbol{w}$ 的联合优化模型如下：

$$\begin{cases} \max\limits_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{w}} \ R_{\mathrm{SIN}}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{w}) = \dfrac{\sigma\left|\boldsymbol{w}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}(\theta_0)\boldsymbol{s}\right|^2}{\boldsymbol{w}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{s})\boldsymbol{w} + \boldsymbol{w}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{w}} \\ \text{s.t.} \quad \arg\ s(n) \in [\mu_n, \mu_n + 1, \cdots, \mu_n + \delta_d - 1] \\ \left|s(n)\right| = \dfrac{1}{\sqrt{M_{\mathrm{t}}N}}, \qquad n = 1,2,\cdots,M_{\mathrm{t}}N \end{cases} \tag{6}$$

2.2 优化模型的求解

为求解式(10)中的优化问题，可以考虑采用循环迭代算法进行求解。本文将迭代过程分解为 2 个子优化问题求解过程，即固定滤波权值 $\boldsymbol{w}$ 时优化波形 $\boldsymbol{s}$ ，以及在波形 $\boldsymbol{s}$ 固定时对权值 $\boldsymbol{w}$ 进行优化，循环优化的具体过程如下：

1) 发射波形固定时优化接收滤波权值

当发射波形 $\boldsymbol{s}$ 固定时，波形的 2 个约束条件可以省略，假设输入信噪比 $\sigma = E\{|\alpha_0|^2\}/\sigma_n^2$ 先验已知，则式(6)的优化模型转化为无约束优化问题

$$\max_{\boldsymbol{w}} \ \frac{\left|\boldsymbol{w}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}(\theta_0)\boldsymbol{s}\right|^2}{\boldsymbol{w}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{s})\boldsymbol{w} + \boldsymbol{w}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{w}} \tag{7}$$

易知式(7)的优化问题与阵列信号处理中的最小方差无失真响应(Minimum Variance Distortless Response，MVDR)等价，其最优解为：

$$\boldsymbol{w}_{\text{opt}}=\frac{\left(\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{s})+\boldsymbol{I}\right)^{-1}\boldsymbol{A}(\theta_0)\boldsymbol{s}}{\boldsymbol{s}^{\text{H}}\boldsymbol{A}^{\text{H}}(\theta_0)\left(\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{s})+\boldsymbol{I}\right)^{-1}\boldsymbol{A}(\theta_0)\boldsymbol{s}} \tag{8}$$

2) 权值固定时优化发射波形

接下来讨论接收滤波权值 $\boldsymbol{w}$ 固定时发射波形 $\boldsymbol{s}$ 的求解问题。权值 $\boldsymbol{w}$ 固定，式(6)的优化问题可转化为：

$$\begin{cases}\max\limits_{\boldsymbol{s}} & \dfrac{\left|\boldsymbol{w}^{\text{H}}\boldsymbol{A}(\theta_0)\boldsymbol{s}\right|^2}{\boldsymbol{w}^{\text{H}}\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{s})\boldsymbol{w}+\boldsymbol{w}^{\text{H}}\boldsymbol{w}}\\ \text{s.t.} & \arg\ s(n)\in[\mu_n,\mu_n+1,\cdots,\mu_n+\delta_d-1]\\ \left|s(n)\right|=\dfrac{1}{\sqrt{M_{\text{t}}N}}, & n=1,2,\cdots,M_{\text{t}}N\end{cases} \tag{9}$$

由于恒模和有限相位约束条件的存在，该优化问题属于非凸优化。为了获得其最优解，需要进一步转化。注意到 $\left|\boldsymbol{w}^{\text{H}}\boldsymbol{A}(\theta_0)\boldsymbol{s}\right|^2=\left|\boldsymbol{s}^{\text{H}}\boldsymbol{A}^{\text{H}}(\theta_0)\boldsymbol{w}\right|^2$，$\left|\boldsymbol{w}^{\text{H}}\sum\limits_{k=1}^{K}\alpha_k\boldsymbol{A}(\theta_k)\boldsymbol{s}\right|^2=\left|\boldsymbol{s}^{\text{H}}\sum\limits_{k=1}^{K}\alpha_k\boldsymbol{A}^{\text{H}}(\theta_k)\boldsymbol{w}\right|^2$，则有下式成立

$$\frac{\left|\boldsymbol{w}^{\text{H}}\boldsymbol{A}(\theta_0)\boldsymbol{s}\right|^2}{\boldsymbol{w}^{\text{H}}\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{s})\boldsymbol{w}+\boldsymbol{w}^{\text{H}}\boldsymbol{w}}=\frac{\boldsymbol{s}^{\text{H}}\boldsymbol{\Sigma}_0(\boldsymbol{w})\boldsymbol{s}}{\boldsymbol{s}^{\text{H}}\boldsymbol{\Sigma}_I(\boldsymbol{w})\boldsymbol{s}+\boldsymbol{w}^{\text{H}}\boldsymbol{w}} \tag{10}$$

式中：$\boldsymbol{\Sigma}_0(\boldsymbol{w})=\boldsymbol{A}^{\text{H}}(\theta_0)\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^{\text{H}}\boldsymbol{A}(\theta_0)$，$\boldsymbol{\Sigma}_I(\boldsymbol{w})=\sum\limits_{k=1}^{K}I_k\boldsymbol{A}^{\text{H}}(\theta_k)\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^{\text{H}}\boldsymbol{A}(\theta_k)$。根据矩阵迹的性质 $\text{tr}(\boldsymbol{AB})=\text{tr}(\boldsymbol{BA})$，可知 $\text{tr}\left(\boldsymbol{s}^{\text{H}}\boldsymbol{\Sigma}_I(\boldsymbol{w})\boldsymbol{s}+\boldsymbol{w}^{\text{H}}\boldsymbol{w}\right)=\text{tr}\left(\boldsymbol{\Sigma}_I(\boldsymbol{w})\boldsymbol{s}\boldsymbol{s}^{\text{H}}+\boldsymbol{w}^{\text{H}}\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{s}\boldsymbol{s}^{\text{H}}\right)$，通过引入辅助变量 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{s}\boldsymbol{s}^{\text{H}}$，则式(9)进一步与如下问题等价：

$$\begin{cases}\max\limits_{\boldsymbol{X}} & \dfrac{\text{tr}\left(\boldsymbol{\Sigma}_0(\boldsymbol{w})\boldsymbol{X}\right)}{\text{tr}\left((\boldsymbol{\Sigma}_I(\boldsymbol{w})+\boldsymbol{w}^{\text{H}}\boldsymbol{w}\boldsymbol{I})\boldsymbol{X}\right)}\\ \text{s.t.} & \arg\ s(n)\in[\mu_n,\mu_n+1,\cdots,\mu_n+\delta_d-1]\\ \text{diag}(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{I},\ \text{rank}(\boldsymbol{X})=1\\ \boldsymbol{X}\geqslant 0\end{cases} \tag{11}$$

符号 rank(•) 表示矩阵的秩。半正定松弛并配合高斯随机化(Gaussian Randomization)是求解上式含秩 1 约束优化问题的有效手段之一，因此本文采用半正定松弛技术对式(11)进行求解。首先松弛掉式(11)中的有限相位约束条件，稍后会在随机化过程中重建该约束，同时松弛矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的秩等于 1 的约束条件，可得：

$$\begin{cases}\max\limits_{\boldsymbol{X}} & \dfrac{\text{tr}\left(\boldsymbol{\Sigma}_0(\boldsymbol{w})\boldsymbol{X}\right)}{\text{tr}\left((\boldsymbol{\Sigma}_I(\boldsymbol{w})+\boldsymbol{w}^{\text{H}}\boldsymbol{w}\boldsymbol{I})\boldsymbol{X}\right)}\\ \text{s.t.} & \text{diag}(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{X}\geqslant 0\end{cases} \tag{12}$$

由于式(12)的目标函数不是 $\boldsymbol{X}$ 的凸函数，根据文献[13]可知，若优化问题

$$\begin{cases}\max\limits_{\boldsymbol{Z},t} & \text{tr}\left(\boldsymbol{\Sigma}_0(\boldsymbol{w})\boldsymbol{Z}\right)\\ \text{s.t.} & \text{tr}\left((\boldsymbol{\Sigma}_I(\boldsymbol{w})+\boldsymbol{w}^{\text{H}}\boldsymbol{w}\boldsymbol{I})\boldsymbol{Z}\right)=1\\ \text{diag}(\boldsymbol{Z})=t\boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{Z}\geqslant 0,\ t\geqslant 0\end{cases} \tag{13}$$

的最优解为 $(\boldsymbol{Z}^*,t^*)$，则式(20)中优化问题的最优解满足 $\boldsymbol{X}^*=\boldsymbol{Z}^*/t^*$。

由于式(13)为半正定规划(Semi-Definite Programming，SDP)问题，因此可采用内点法[16]求得其全局最优解。结合命题 1，当得到式(13)的全局最优解后，接着在高斯随机化方法中重建有限相位取值以及秩为 1 的约束条件，就可以获得式(9)子优化问题的结果。本文采用的高斯随机化具体过程为：令 N_{g} 为总的随机化次数，在第 i 次($1\leqslant i\leqslant N_{\text{g}}$)高斯随机化过程中，生成均值为 $\boldsymbol{0}$，协方差矩阵为 $\boldsymbol{C}$ 的 $1\times M_{\text{t}}N$ 维的高斯随机向量 $\boldsymbol{\xi}_i$ ($i=1,2,\cdots,N_{\text{g}}$)，即满足 $\boldsymbol{\xi}_i\sim N(\boldsymbol{0},\boldsymbol{C})$。其中 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{X}^*\bullet\boldsymbol{p}\boldsymbol{p}^H$，$\boldsymbol{p}=(1/\sqrt{M_{\text{t}}N})[\text{e}^{-\text{j}\mu_1},\text{e}^{-\text{j}\mu_1},\cdots,\text{e}^{-\text{j}\mu_{M_{\text{t}}N}}]^{\text{T}}$，$\mu_n=L\times\arg s_0(n)/2\pi-\left\lfloor L\times\arccos(1-\varepsilon^2/2)/2\pi\right\rfloor$。在第 i 次随机化得到的发射波形为：

$$\boldsymbol{s}_i(k)=\boldsymbol{p}(k)\eta(\boldsymbol{\xi}_i(k)) \tag{14}$$

式中：$k=1,2,\cdots,M_{\mathrm{t}}N$；$\boldsymbol{p}(k)$ 为向量 $\boldsymbol{p}$ 的第 k 个元素；$\eta(\xi_i(k))$ 的取值为：

$$\eta(\xi_i(k))=\begin{cases}1 & \text{if } \arg\xi_i(k)\in[0,2\pi\frac{1}{\delta_d}) \\ \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\frac{1}{L}} & \text{else } \arg\xi_i(k)\in[2\pi\frac{1}{\delta_d},2\pi\frac{2}{\delta_d}) \\ \vdots & \\ \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\frac{\delta_d-1}{L}} & \text{else } \arg\xi_i(k)\in[2\pi\frac{\delta_d-1}{\delta_d},2\pi)\end{cases} \tag{15}$$

然后，取 N_{g} 次随机化过程中使得 SINR 最大的 $\boldsymbol{s}_i$ 作为高斯随机化的结果，即

$$\boldsymbol{s}_{\mathrm{opt}}=\arg\max_{s_i}\frac{\boldsymbol{s}_i^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\Sigma}_0(\boldsymbol{w})\boldsymbol{s}_i}{\boldsymbol{s}_i^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\Sigma}_I(\boldsymbol{w})\boldsymbol{s}_i+\boldsymbol{w}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{w}} \tag{16}$$

综上所述，循环迭代在固定波形 $\boldsymbol{s}$ 时计算滤波权值 $\boldsymbol{w}$，在固定权值 $\boldsymbol{w}$ 时求解优化波形 $\boldsymbol{s}$，本文提出的 MIMO 雷达波形与接收滤波联合优化算法具体步骤如下：

步骤 1：设定相似期望波形 $\boldsymbol{s}_0$，初始化迭代次数为 $m=1$，记待优化的 MIMO 雷达波形为 $\boldsymbol{s}^{(1)}=\boldsymbol{s}_0$，利用式(8)计算初始化接收滤波权值 $\boldsymbol{w}^{(1)}$，根据式(1)计算输出信干噪比 $R_{\mathrm{SIN}}(\boldsymbol{s}^{(1)},\boldsymbol{w}^{(1)})$；

步骤 2：令 $m=m+1$，固定接收滤波权值 $\boldsymbol{w}^{(m-1)}$，求解式(13)中的优化问题，得到最优解 $\boldsymbol{X}^*=\boldsymbol{Z}^*/t^*$；

步骤 3：进行 N_{g} 次高斯随机化运算，根据式(14)计算 $\boldsymbol{s}_i^{(m)}(n)$（$i=1,2,\cdots,N_{\mathrm{g}}$，$n=1,2,\cdots,M_{\mathrm{t}}N$）。然后利用式(16)得到 N_{g} 次高斯随机化的最优发射波形 $\boldsymbol{s}^{(m)}=\boldsymbol{s}_{\mathrm{opt}}$；

步骤 4：在固定 $\boldsymbol{s}^{(m)}$ 的情况下，利用式(8)更新权值 $\boldsymbol{w}^{(m)}$；

步骤 5：根据式(1)计算输出 $R_{\mathrm{SIN}}{}^{(m)}=R_{\mathrm{SIN}}(\boldsymbol{s}^{(m)},\boldsymbol{w}^{(m)})$；

步骤 6：判断条件 $\left|R_{\mathrm{SIN}}{}^{(m)}-R_{\mathrm{SIN}}{}^{(m-1)}\right|\leqslant\varepsilon_{\mathrm{stop}}$ 是否满足，其中 $\varepsilon_{\mathrm{stop}}$ 表示迭代终止门限。若条件成立就终止迭代，否则返回至**步骤 2**。

3 实验仿真

仿真中设定 MIMO 雷达的发射阵元数为 $M_{\mathrm{t}}=4$，接收阵元数为 $M_{\mathrm{r}}=8$，发射和接收阵元间距为半波长，信号编码长度为 $N=20$。假设待测目标角度为 $\theta_0=10°$，目标功率为 $|\alpha_0|^2=20$ dB，且存在 3 个干扰目标，所在角度分别为 $\theta_i=[-40°,-10°,30°]$，干扰功率均为 $|\alpha_i|^2=30$ dB ($i=1,2,3$)，噪声的平均功率为 $\sigma_{\mathrm{n}}^2=0$ dB。考虑到线性调频信号(Linear Frequency Modulation，LFM)具有较好的脉冲压缩性能，因此本文将 LFM 波形作为相似期望波形 $\boldsymbol{s}_0$，其表达式为 $\boldsymbol{s}_0=\mathrm{vec}\left((1/\sqrt{M_{\mathrm{t}}N})\cdot\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{j}2\pi m(n-1)+\mathrm{j}\pi m(n-1)^2}{N}}\right)$，$(m=1,2\cdots,M_{\mathrm{t}};\ n=1,2,\cdots,N)$。值得指出的是，LFM 期望波形在干扰信号存在的情况下，系统的输出 SINR 通常较低。仿真中相位的量化位数设置为 L=128，高斯随机化次数取 N_{g}=500，SINR 终止迭代阈值设置为 $\varepsilon_{\mathrm{stop}}$=$10^{-3}$，本文选择文献[15]所提 2 种序列优化算法(分别记为 SOA1 及 SOA2)作为对比算法。

实验 1 为验证本文算法的有效性，图 1 给出了相似参数 ε 分别取 2 和 0.5 时，文献[15]和所提算法输出 SINR 随着迭代次数的变化曲线。可以看出，在 2 个相似参数 ε 的约束下，本文算法的输出 SINR 随着迭代次数的增加不断提升，经过 3~4 次迭代后，算法达到收敛，收敛速度较快。当 $\varepsilon=2$，即波形 $\boldsymbol{s}$ 的相似约束不起作用时，本文算法收敛后的 SINR 距离该仿真条件下的 SINR 上界 20 dB(即不存在干扰目标时的 SINR)仅相差 0.55 dB，较文献[15]的 SOA1 和 SOA2 算法分别高 0.2 dB 和 0.25 dB，因此本文算法对干扰信号的抑制效果更好。当 $\varepsilon=0.5$，即存在较强的波形相似约束时，所提算法

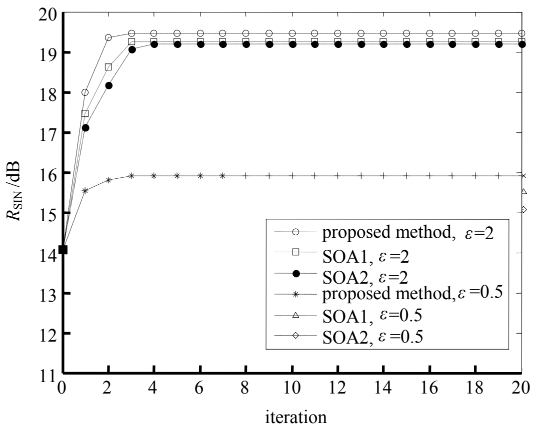
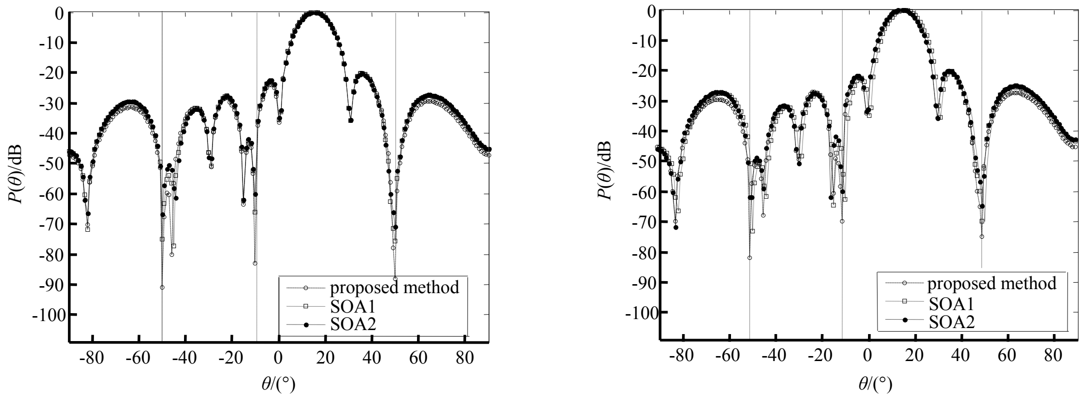


Fig.1 Output SINR curves versus iteration index
图 1 输出 SINR 随迭代次数的变化曲线

收敛后的 SINR 较 $\varepsilon=2$ 时降低至 15.9 dB，这是由于波形脉压性能的提升会牺牲一定的输出信干噪比，带来信噪比损失。此时本文算法的输出 SINR 仍较 SOA1 和 SOA2 算法分别高 0.4 dB 和 0.84 dB。

图 2 给出了 SOA1,SOA2 及本文算法在相似参数 ε 分别取 2 和 0.5 时对应的方向图增益曲线。方向图增益 $P(\theta)$ 定义为 $P(\theta)=\left|\boldsymbol{w}_{\rm opt}^{\rm H}\boldsymbol{A}(\theta)\boldsymbol{s}_{\rm opt}\right|^2$，其中 $\boldsymbol{A}(\theta)=\boldsymbol{I}_N\otimes(\boldsymbol{b}(\theta)\boldsymbol{a}^{\rm T}(\theta))$。从图中可以看出，本文算法的方向图增益在目标方位 $\theta_0=10^\circ$ 的响应最强，在杂波 $[-40^\circ,-10^\circ,30^\circ]$ 处形成了深的零陷凹口，且形成的零陷较 SOA1 和 SOA2 算法更深，因此所提算法可以更有效地抑制干扰信号，有利于提高 MIMO 雷达的目标检测性能。通过对比图 2(a)~(b)可以看出，当 ε=2 时形成的零陷较 ε=0.5 时低 10 dB 左右，说明当波形相似，约束较弱时，所提算法的零陷水平会更深。

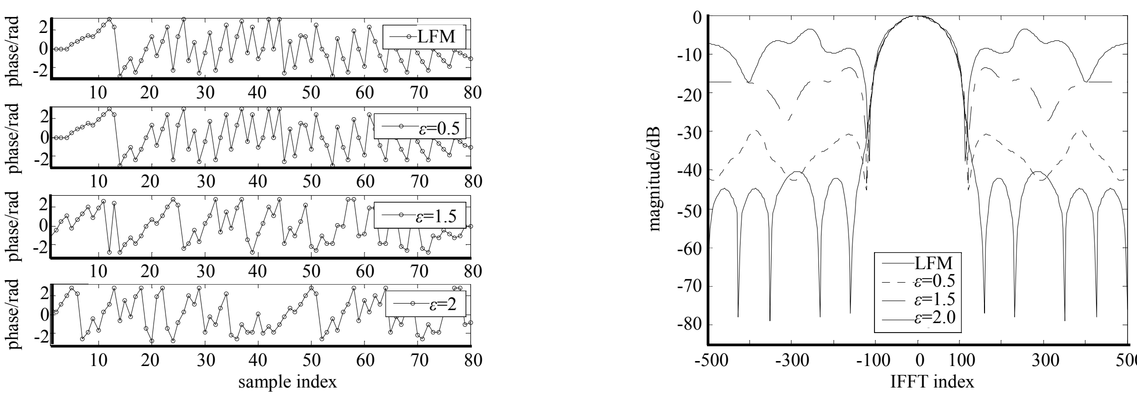


(a) beam pattern curves with ε=0.2　　　(b) beam pattern curves with ε=0.5

Fig.2 Beam pattern with different similar parameters

图 2 不同相似参数时的方向图增益曲线

实验 2　为了验证相似约束条件对优化波形特性的影响，图 3(a)给出了本文算法在相似参数分别取 ε=0.5, ε=1.5 以及 ε=2 时优化波形与期望 LFM 波形的相位对比图，仿真参数与**实验 1** 保持一致。由于波形为恒模信号，这里没有画出波形的幅度。从图 3(a)中可以看出，当 ε=0.5 时，优化波形与 LFM 波形的相位吻合程度较高；而当 ε=1.5, ε=2 时，相位的相似程度逐渐变弱。图 3(b)给出了本文算法在相似参数分别取 ε=0.5,ε=1.5 以及 ε=2 时优化波形与期望 LFM 波形的脉冲压缩对比结果。由于 MIMO 雷达各个发射天线的优化波形脉压性能一致，因此在图 3(b)中只展示了第 1 个发射阵元波形经过匹配滤波后的脉压结果。可以看出，ε=0.5 时，优化波形脉压旁瓣为 −30 dB，比期望 LFM 波形的脉压旁瓣高 11 dB。当 ε 分别取 1.5,2 时，脉压旁瓣分别为−15 dB,−7 dB。实验结果表明，随着相似参数 ε 的增加，发射波形的脉冲压缩性能逐渐下降。由于相似参数 ε 增加会使系统的输出 SINR 得到改善，因此需要根据 MIMO 雷达的实际使用场景，合理设置相似参数 ε，来平衡雷达系统的干扰抑制及脉冲压缩性能，使两者得到较好的折中。



(a) waveform phase with different ε　　　(b) pulse compression profile with different ε

Fig.3 Impact of similar parameters on waveform phase and pulse compression

图 3 相似参数对波形相位及脉压的影响

4　结论

本文提出了一种 MIMO 雷达波形与接收滤波联合优化算法，能够有效改善 MIMO 雷达在干扰环境下的输出信干噪比。在模型求解过程中，使用了循环迭代算法框架，得到发射波形与接收滤波权值的联合优化结果。仿真

结果表明，本文算法可以在干扰信号所在角度形成深的零陷，使干扰信号得到有效抑制，较现有方法有更高的输出信干噪比。相似约束的减弱会使系统输出 SINR 降低，但脉冲压缩性能将得到改善。因此可根据应用场景设置相似参数，使两者性能得到较好的折中。

参考文献：

[1] LI J,STOICA P. MIMO Radar Signal Processing[M]. Hoboken:John Wiley & Sons, 2008.

[2] HAIMOVICH A M,BLUM R S,CIMINI L J. MIMO radar with widely separated antennas[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2008,25(1):116-129.

[3] 胡捍英,孙扬,郑娜娥. 多目标速度估计的分布式 MIMO 雷达资源分配算法[J]. 电子与信息学报, 2016,38(10):2453-2460. (HU Hanying,SUN Yang,ZHENG Na'e. Resource allocation approach in distributed MIMO radar with multiple targets for velocity estimation[J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2016,38(10):2453-2460.)

[4] HEESEONG Y,JOOHWAN C. An improved algebraic solution for moving target localization in noncoherent MIMO radar systems[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2016,64(1):258-270.

[5] LI J,STOICA P. MIMO radar with colocated antennas[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2007,24(5):106-114.

[6] 孟藏珍,许稼,谭贤四,等. MIMO-SAR 成像技术发展机遇与挑战[J]. 太赫兹科学与电子信息学报, 2015,13(3):423-430. (MENG Cangzhen,XU jia,TAN Xiansi,et al. Development opportunities and challenges of MIMO-SAR imaging technology[J]. Journal of Terahertz Science and Electronic Information Technology, 2015,13(3):423-430.)

[7] AUBRY A,MAIO A D,HUANG Y. MIMO radar beam pattern design via PSL/ISL optimization[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2016,64(15):3955-3967.

[8] YAN J,JIU B,LIU H,et al. Prior knowledge-based simultaneous multibeam power allocation algorithm for cognitive multiple targets tracking in clutter[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2015,63(2):512-527.

[9] LIU Y,WANG H,WANG J. Robust multiple-input multiple-output radar waveform design in the presence of clutter[J]. IET Radar,Sonar & Navigation, 2016,10(7):1249-1259.

[10] YANG Y,BLUM R S,HE Z,et al. MIMO radar waveform design via alternating projection[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2010,58(3):1440-1445.

[11] TANG B,TANG J,PENG Y. MIMO radar waveform design in colored noise based on information theory[J]. IEEE Trans. on Signal Processing, 2010,58(9):4684-4697.

[12] NAGHIBI T,BEHNIA F. MIMO radar waveform design in the presence of clutter[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2011,47(2):770-781.

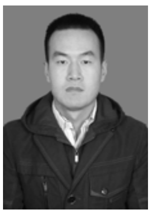
[13] 唐波,张玉,李科,等. 杂波中 MIMO 雷达恒模波形及接收机联合优化算法研究[J]. 电子学报, 2014,42(9):1705-1711. (TANG Bo,ZHANG Yu,LI Ke,et al. Joint constant-envelope waveform and receiver design for MIMO radar in the presence of clutter[J]. Acta Electronica Sinica, 2014,42(9):1705-1711.)

[14] MAIO A D,NICOLA S D,HUANG Y,et al. Design of phase codes for radar performance optimization with a similarity constraint[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2009,57(2):610-621.

[15] CUI G,LI H,RANGASWAMY M. MIMO radar waveform design with constant modulus and similarity constraints[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2014,62(2):343-353.

[16] LUO Z,MA W,SO A M C,et al. Semidefinite relaxation of quadratic optimization problems[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2010, 27(3): 20-34.

作者简介：



李玉翔(1987-)，男，河南省安阳市人，在读博士研究生，主要研究方向为 MIMO 雷达波形设计、阵列信号处理.email:liyuxiangwork@163.com.

胡捍英(1961-)，男，河南省南阳市人，教授，博士生导师，主要研究方向为无线通信和空间信息技术.

赵智昊(1992-)，男，南京市人，在读硕士研究生，主要研究方向为 MIMO 雷达参数估计与阵列信号处理.

李海文(1980-)，男，河南省驻马店市人，在读博士研究生，讲师，主要研究方向为无线通信技术和空间信号处理.