

文章编号: 2095-4980(2017)04-0670-07

随机测量条件下的循环自相关函数无网格估计

陈栩杉^{1,2}, 张雄伟², 杨吉斌², 乔林², 李轶南², 王文²

(1.武警政治学院, 上海 201703; 2.解放军理工大学, 江苏 南京 210007)

摘要: 利用循环平稳特性对通信信号进行参数估计是一种常用的处理方法。由于通信信号在循环频率域具有稀疏特性, 可以利用随机测量有效降低采样处理的数据量, 减轻硬件负荷, 并基于压缩采样值进行信号参数估计。然而, 在稀疏建模时通常将连续的信号参数空间划分为有限数量的均匀网格, 引起基不匹配问题, 使得信号在某个假定的离散变换基(傅里叶基、小波基等)下并不稀疏, 从而严重影响信号参数估计精确度。为解决这个问题, 本文利用原子范数描述循环频率域的连续性和稀疏性, 提出一种随机测量条件下的高精确度循环自相关函数无网格估计方法。仿真实验表明, 这种无网格估计方法能够有效降低循环自相关函数的估计误差。

关键词: 压缩感知; 循环自相关函数; 原子范数; 半定规划; 交替方向乘子法

中图分类号: TN911.23

文献标志码: A

doi: 10.11805/TKYDA201704.0670

Gridless cyclic autocorrelation estimation for random measurements

CHEN Xushan^{1,2}, ZHANG Xiongwei², YANG Jibin², QIAO Lin², LI Yinan², WANG Wen²

(1.CAPF Institute of Politics, Shanghai 201703, China; 2.PLA University of Science and Technology, Nanjing Jiangsu 210007, China)

Abstract: A common method for parameter estimation is adopting the inherent cyclostationary properties which vary periodically in the communication signals. Since the communication signals exhibit sparsity at the cycle frequency domain, the random measurements can be utilized to reduce the number of samples and lighten the burden of sampling hardware, and then the parameter estimation can be completed based on the compressive samples. However, in this kind of sparse modeling, it is inevitable that the continuous parameter space is discretized into a finite set of grid points, which will lead to basis mismatch. The signals cannot be expressed sparsely under an assumed finite dictionary, e.g. Fourier basis and DFT basis, therefore the parameter estimation accuracy is seriously affected by basis mismatch. In this paper, a gridless CA reconstruction which can locate the nonzero cyclic frequencies on an infinitely dense grid is proposed by utilizing the atomic norm to describe the continuity and sparsity of the cycle frequency domain. Numerical results demonstrate that the proposed method can reduce the mean square error of estimation effectively.

Keywords: compressive sensing; cyclic autocorrelation function; atomic norm; semidefinite programming; alternating direction method of multipliers

近年来兴起的压缩感知理论^[1-5]指出, 对于可稀疏表示或可压缩的信号, 可以直接舍弃冗余数据, 直接对有用信息进行测量, 达到从信号获取信息的目的, 从而大大降低采样速率。因此, 信号的稀疏和冗余表示^[6]成为新的采样理论的基础和出发点, 这种关于信号源的稀疏域模型对多种数据源具有普适性, 具有统一的建模观点。特别是在现代信号处理领域, 许多研究从信号的稀疏性出发, 重新认识传统的信号和信息压缩、信号检测和估计问题^[7-9], 解决了一系列传统方法难以克服的难题, 在雷达成像^[10]、通信^[11]、阵列信号处理、宽带频谱感知^[12-13]等领域均得到了广泛应用。

信号的循环自相关函数(Cyclic Autocorrelation, CA)的非零值表示信号的频移分量之间存在相关性, 它描述信号的循环平稳特性, 包含丰富的信息, 如载波频率、调制方式、符号周期等。传统循环自相关函数估计方法一般需要较长的观测时间获取更多的样本, 这对处理系统的存储和计算能力提出了较高的要求。由于循环自相关函

收稿日期: 2016-09-26; 修回日期: 2016-10-19

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61471394, 61402519); 江苏省自然科学基金资助项目(BK20140071)

数具有稀疏特性，只在信号的循环频率支撑集上存在非零峰值，考虑利用压缩感知可以有效减少观测样本个数，减小系统存储空间并降低运算复杂度。Zhi 等人在标准压缩感知框架下提出一种循环自相关函数估计方法^[14]，不仅大大减少了观测时间和采样点数，还利用重构过程的去噪能力降低了循环自相关函数的估计误差。Bollig 等人将循环自相关函数的结构特征作为先验信息，构建冗余字典来描述循环频率结构^[15]，进一步降低了循环自相关函数的估计误差。

然而，信号的稀疏域模型通常假设信号在某个已知的变换基(傅里叶基、小波基等)下是稀疏的，在许多实际应用中这个基可以看作是有限离散的字典，把信号参数空间划分成均匀的网格^[16-17]，并假设信号参数由某些网格点来表示^[18-20]。这种离散化的建模方法较为简单，易于分析处理，但不可避免地会引起基不匹配问题，即信号的实际参数值并未落在划分好的网格上，导致所选的变换基无法对信号进行稀疏表示，感兴趣参数的估计误差较大^[21]。另一方面，如果通过划分非常精细的网格来解决基不匹配问题，又会使得字典中相邻原子之间的相关性过强，不能满足压缩感知的等距约束性(Restricted Isometry Property, RIP)条件，使得压缩感知的重构性能出现恶化现象^[22]。

上述方法虽取得了较好的效果，但仍然无法回避离散化循环频率域带来的基不匹配问题。本文采用原子范数描述循环频率域的连续性和稀疏性，提出一种随机测量条件下的循环自相关函数无网格估计方法。原子范数是解决基不匹配问题的一个新思路，2012 年，Chandrasekaran 等提出采用原子集合凸包的连续特性来计算原子范数(Atomic Norm)^[23]，能够在约束信号稀疏特性的同时保证其参数空间的连续性，为解决基不匹配问题奠定了坚实的基础。Tang 等提出了无网格压缩感知框架(Gridless Compressive Sensing, Gridless CS)^[21]，给出了从压缩采样值中重构连续的信号参数的可行性证明和所需满足的条件。本文通过求解原子范数最小化问题确定信号的循环频率支撑集，该方法估计精确度较高，是对压缩感知框架下的循环自相关函数估计的一次有益尝试和探索。

1 循环自相关函数的无网格估计

1.1 原子范数

令 A 为一个原子集合，若其凸包 $\text{conv}(A)$ 相对于原点是一个中心对称的紧集，且包含原点作为内点，这意味着 A 中的元素都是 $\text{conv}(A)$ 的极值点。此时原子范数定义为凸包 $\text{conv}(A)$ 的尺度函数定义的范数，用 $\|\cdot\|_A$ 表示，即：

$$\|s\|_A = \inf\{t > 0 : s \in t \cdot \text{conv}(A)\} = \inf\left\{\sum_k c_k : s = \sum_k c_k a_k, c_k \geq 0, a_k \in A\right\} \quad (1)$$

其中， $\inf$ 表示下确界。不难看出，当集合 A 是由单位范数的 1-稀疏原子构成时，原子范数 $\|\cdot\|_A$ 即为 l_1 范数；当集合 A 是由单位范数的秩为 1 的矩阵构成时，原子范数 $\|\cdot\|_A$ 即为核范数。原子范数 $\|\cdot\|_A$ 实际上是给集合 A 增加了稀疏约束，这种约束方式将集合 A 看作一个描述连续变化参数的无限字典，同时在增加稀疏约束时没有引入离散化表示，避免了基不匹配问题的产生。原子范数具有半定规划(Semidefinite Programming, SDP)性质，可以将其转化为如下的半定规划问题进行求解：

$$\|s\|_A = \inf\left\{\frac{1}{2|J|} \text{tr}(T(u)) + \frac{1}{2}t : \begin{bmatrix} T(u) & s \\ s^H & t \end{bmatrix} \geq 0\right\} \quad (2)$$

式中： $J = \{0, 1, \dots, N-1\}$ 表示 N 个均匀采样点； $|J| = N$ ， $T(u) \in C^{N \times N}$ 是 Toeplitz 矩阵， $T(u)$ 的第 1 行为 $u = [u_1, u_2, \dots, u_N] \in C^N$ ，即：

$$T(u) = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_N \\ u_2^H & u_1 & \cdots & u_{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_N^H & u_{N-1}^H & \cdots & u_1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

1.2 无网格估计优化模型

考虑信号 $x(t)$ 的均匀时域采样 $\mathbf{x} = [x(0), x(T_e), \dots, x((N-1)T_e)]^T \in C^N$ ，其中 T_e 为采样间隔，那么可以根据下式来估计循环自相关函数：

$$\hat{R}_x^\alpha(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_e) x^*(nT_e + \tau) e^{-j2\pi\alpha\tau} \quad (4)$$

式中 $\alpha = i/NT_e$, $i = 0, 1, \dots, N-1$, 时延 τ 是采样间隔 T_e 的整数倍。令 $\mathbf{F}$ 为离散傅里叶变换矩阵, $\mathbf{y}_{\tau_0} = \mathbf{x} \odot \mathbf{x}_{\tau_0}$, $\odot$ 表示点乘, $\hat{\mathbf{R}}_x(\tau_0) = [\hat{\mathbf{R}}_x^0(\tau_0), \hat{\mathbf{R}}_x^1(\tau_1), \dots, \hat{\mathbf{R}}_x^{(N-1)/NT_e}(\tau_0)]^T$, 则上述循环自相关函数求解过程可以表示为下列矩阵形式:

$$\hat{\mathbf{R}}_x(\tau_0) = \frac{1}{N} \mathbf{F} \mathbf{y}_{\tau_0} \quad (5)$$

由式(5)可知, 为了对长度为 N 的循环自相关函数进行估计, 传统循环自相关函数估计方法需要 $\mathbf{y}_{\tau_0}$ 的所有 N 个元素进行计算, 即信号 $x(t)$ 的 N 个采样值。为了减少观测采样时间, 可以只用 $\mathbf{y}_{\tau_0}$ 的 m 个随机采样值对循环自相关函数进行估计, $m \ll N$, 有:

$$\tilde{\mathbf{y}}_{\tau_0} = \Phi \mathbf{y}_{\tau_0} = N \Phi \mathbf{F}^{-1} \hat{\mathbf{R}}_x(\tau_0) \quad (6)$$

式中: Φ 为 $n \times N$ 的列归一化的高斯随机矩阵; $\mathbf{F}^{-1}$ 为离散傅里叶逆矩阵; $\mathbf{y}_{\tau_0} = N \mathbf{F}^{-1} \hat{\mathbf{R}}_x(\tau_0)$ 。那么, 此时问题转化为从少量随机采样值计算得到的 $\tilde{\mathbf{y}}_{\tau_0}$ 来重构循环自相关函数 $\hat{\mathbf{R}}_x(\tau_0)$, 由于 $\hat{\mathbf{R}}_x(\tau_0)$ 只在 $\alpha = 0$ 、循环频率基频及其谐波分量处存在非零值, 其余循环频率处均为 0, 具有稀疏先验信息, 因此可以利用 ℓ_1 来约束其稀疏结构特性:

$$\min_{\hat{\mathbf{R}}_x(\tau_0)} \|\hat{\mathbf{R}}_x(\tau_0)\|_1 \quad s.t. \quad \tilde{\mathbf{y}}_{\tau_0} = N \Phi \mathbf{F}^{-1} \hat{\mathbf{R}}_x(\tau_0) \quad (7)$$

从式(7)中可以看出, 离散傅里叶逆矩阵 $\mathbf{F}^{-1}$ 将连续的循环频率域划分成若干均匀的网格, 并认为在这个基下的循环自相关函数 $\hat{\mathbf{R}}_x(\tau_0)$ 是稀疏的, 正如之前所提到的, 这种简单的建模和假设会带来基不匹配问题, 当真实的非零循环频率并不落在划分好的离散网格上时, 采用式(7)估计出的循环自相关函数会出现较大误差。为此, 将 $\mathbf{y}_{\tau_0} = N \mathbf{F}^{-1} \hat{\mathbf{R}}_x(\tau_0)$ 看作一个整体, 不用离散傅里叶基 $\mathbf{F}$ 来建立时延乘积与循环自相关函数之间的关系, 也就是说, 不给定基 $\mathbf{F}$ 使得 $\mathbf{y}_{\tau_0}$ 在这个基下是稀疏的。那么, 式(7)的优化问题可以转化为如下的原子范数最小化问题:

$$\min \|\mathbf{N} \mathbf{F}^{-1} \hat{\mathbf{R}}_x(\tau_0)\|_A \quad s.t. \quad \tilde{\mathbf{y}}_n = N \Phi \mathbf{F}^{-1} (\hat{\mathbf{R}}_x(\tau_0) + \mathbf{n}) \quad (8)$$

进一步消除等式约束, 上式变为原子范数逼近问题:

$$\min_{\tilde{\mathbf{y}}_{\tau_0}} \frac{1}{2} \|\tilde{\mathbf{y}}_n - \Phi \mathbf{y}_{\tau_0}\|_2^2 + \tau \|\mathbf{y}_{\tau_0}\|_A \quad (9)$$

下面给出关于式(9)的一些有用性质, 这些性质可以保证能够成功得到式(9)的最优解 $\hat{\mathbf{y}}_{\tau_0}$ 。

定理 1: 定义 $\|\mathbf{z}\|_A^* = \sup \langle \mathbf{s}, \mathbf{z} \rangle_R$ 为对偶原子范数, 其中 $\sup$ 表示上确界, $\hat{\mathbf{y}}_{\tau_0}$ 是式(9)的最优解当且仅当

$$\begin{cases} \|\Phi^T (\tilde{\mathbf{y}}_n - \Phi \hat{\mathbf{y}}_{\tau_0})\|_A^* \leq \tau \\ \langle \Phi^T (\tilde{\mathbf{y}}_n - \Phi \hat{\mathbf{y}}_{\tau_0}), \hat{\mathbf{y}}_{\tau_0} \rangle = \tau \|\hat{\mathbf{y}}_{\tau_0}\|_A \end{cases} \quad (10)$$

定理 2: 令 $\mathbf{z} = N \Phi \mathbf{F}^{-1} \mathbf{n}$, 则式(7)的对偶问题为:

$$\max_{\mathbf{z}} \frac{1}{2} (\|\tilde{\mathbf{y}}_n\|_2^2 - \|\tilde{\mathbf{y}}_n - \mathbf{z}\|_2^2) \quad s.t. \quad \|\Phi^T \mathbf{z}\|_A^* \leq \tau \quad (11)$$

与原始问题相对应, 对偶问题也有唯一的最优解, 原始最优解与对偶最优解是等价的, 当且仅当

$$\tilde{\mathbf{y}}_n = \Phi \hat{\mathbf{y}}_{\tau_0} + \hat{\mathbf{z}}, \quad \|\Phi^T \hat{\mathbf{z}}\|_A^* \leq \tau, \quad \langle \Phi^T \hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{y}}_{\tau_0} \rangle = \tau \|\hat{\mathbf{y}}_{\tau_0}\|_A \quad (12)$$

定理 1 和 2 的证明过程可以根据文献[24]的附录 A 进行推导。从定理 2 可以看出, 对偶范数具有十分重要的作用, 对偶最优解 $\hat{\mathbf{z}}$ 可以确定 $\hat{\mathbf{y}}_{\tau_0}$ 的支撑集, 也就是循环自相关函数 $\hat{\mathbf{R}}_x(\tau_0)$ 的非零峰值所在的循环频率值。由式(11)和对偶原子范数的定义可知, 通过计算对偶最优解 $\hat{\mathbf{z}}$ 是否满足 $\|\Phi^T \mathbf{z}, \mathbf{a}\| = \tau$ 来定位原始最优解 $\hat{\mathbf{y}}_{\tau_0}$ 的支撑集 S , 其中 $\mathbf{a} \in S$, $S \subset A$ 。

1.3 原子最小化问题的求解

根据原子范数的半定性质, 可以利用式(2)对优化问题(9)进行求解, 则有:

$$\min_{t, \mathbf{u}, \mathbf{y}_{\tau_0}, \mathbf{Z}} \frac{1}{2} \|\tilde{\mathbf{y}}_n - \Phi \mathbf{y}_{\tau_0}\|_2^2 + \frac{\tau}{2} (t + u_1) \quad s.t. \quad \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} T(\mathbf{u}) & \mathbf{y}_{\tau_0} \\ \mathbf{y}_{\tau_0}^* & t \end{bmatrix} \succeq \mathbf{0} \quad (13)$$

将上述等式约束转化为增广拉格朗日函数, 从而可以采用交替方向乘子法(Alternating Direction Method of

Multipliers, ADMM)进行求解, 则有:

$$L_{\rho}(t, \mathbf{u}, \mathbf{y}_{\tau_0}, \mathbf{Z}, \mathbf{A}) = \frac{1}{2} \|\tilde{\mathbf{y}}_n - \Phi \mathbf{y}_{\tau_0}\|_2^2 + \frac{\tau}{2} (t + u_1) + \left\langle \mathbf{A}, \mathbf{Z} - \begin{bmatrix} T(\mathbf{u}) & \mathbf{y}_{\tau_0} \\ \mathbf{y}_{\tau_0}^* & t \end{bmatrix} \right\rangle + \frac{\rho}{2} \left\| \mathbf{Z} - \begin{bmatrix} T(\mathbf{u}) & \mathbf{y}_{\tau_0} \\ \mathbf{y}_{\tau_0}^* & t \end{bmatrix} \right\|_F^2 \quad (14)$$

对于所求的最优解 $\hat{\mathbf{y}}_{\tau_0}$ 来说, 其更新表达式为:

$$\mathbf{y}_{\tau_0}^{l+1} = (2\rho \mathbf{I} + \Phi^T \Phi)^{-1} (\Phi^T \tilde{\mathbf{y}}_n + 2\lambda_1 + 2\rho \mathbf{z}_1) \quad (15)$$

其中, 分块矩阵 $\mathbf{Z}^l$ 和 $\mathbf{A}^l$ 分别表示为:

$$\mathbf{Z}^l = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_0^l & \mathbf{z}_1^l \\ \mathbf{z}_1^{l*} & \mathbf{Z}_{n+1, n+1}^l \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}^l = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_0^l & \lambda_1^l \\ \lambda_1^{l*} & \mathbf{A}_{n+1, n+1}^l \end{bmatrix} \quad (16)$$

此时对偶问题式(11)的解为:

$$\hat{\mathbf{z}} = \Phi^T (\tilde{\mathbf{y}}_n - \Phi \hat{\mathbf{y}}_{\tau_0}) \quad (17)$$

利用对偶问题的最优解可以获得循环自相关函数的非零循环频率支撑集, 即:

$$\left| \sum_{l=0}^{N-1} \hat{\mathbf{z}}_l e^{-j2\pi l f} \right| = \tau \quad (18)$$

一旦得到循环频率支撑集, 令 $\mathbf{D}_{mn} = N \exp(j2\pi m f_n)$, 通过求解下列最小二乘问题就可以得到循环自相关函数的最优估计 $\hat{\mathbf{R}}_{\text{opt}}$:

$$\hat{\mathbf{R}}_x(\tau_0) = \min_{\hat{\mathbf{R}}_{\text{opt}}} \|\tilde{\mathbf{y}}_n - \Phi \mathbf{D} \hat{\mathbf{R}}_{\text{opt}}\|_2^2 \quad (19)$$

在求解式(13)的过程中, 正则化参数 τ 的选取是十分重要的。文献[24]指出 τ 的取值依赖于噪声的对偶范数, 可以将其设置为对偶范数期望的上界

$$\tau = \sigma \left(1 + \frac{1}{\log N} \right) \sqrt{N \log N + N \log(4\pi \log N)} \quad (20)$$

由于噪声 n 是高斯白噪声, 满足 $\mathbf{n} \sim N(0, \sigma^2 \mathbf{I}_N)$, 但是受随机测量矩阵 Φ 的影响, 会出现噪声混叠现象, 此时白噪声变为加性有色高斯噪声, 即 $\Phi \mathbf{n} \sim N(0, \sigma^2 \Phi \Phi^T)$ 。那么令 $\text{tr}(\cdot)$ 表示矩阵的迹, 则此时噪声的标准差近似为 $\bar{\sigma} = (\text{tr}(\sigma^2 \Phi \Phi^T))^{1/2} / m$, 用 $\bar{\sigma}$ 代替上式中的 σ 可以得到随即测量条件下的正则化参数值。

2 仿真实验与性能分析

对于符号周期为 T_s 的 BPSK 信号来说, 其循环平稳周期为 $1/T_s$, 那么信号循环自相关函数的绝对值为^[15]

$$|\tilde{R}_x^{\alpha}(\tau_0)| = \begin{cases} \frac{|T_s - \tau|}{T_s} \frac{\sin(\pi \alpha (T_s - \tau))}{\pi \alpha (T_s - \tau)}, & \alpha = \frac{k}{T_s}, k \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (21)$$

从而有

$$\tilde{\mathbf{R}}_x^{\tau_0}[i] = \begin{cases} |\tilde{R}_x^{i/NT_e}(\tau_0)|, & i \in \left\{0, 1, \dots, \frac{N}{2}\right\} \\ |\tilde{R}_x^{(i-N)/NT_e}(\tau_0)|, & i \in \left\{\frac{N}{2}+1, 2, \dots, N-1\right\} \end{cases} \quad (22)$$

在仿真实验中, 信号长度 $N=1000$, 采样频率 $f_e=2000$ Hz, $T_e=1/f_e$, 符号宽度 $T_s=8T_e$, 时延 $\tau_0=2T_e$, 压缩测量矩阵是随机产生的高斯随机矩阵, 并进行列归一化处理。分别利用式(5)的传统估计(trad.)、式(7)的基于压缩感知的估计方法(cs.)和基于字典的估计方法^[15](dict.)对上述信号的循环自相关函数进行估计, 采用整体均方误差 $MSE_{\text{overall}} = (1/N) \sum_{i=0}^{N-1} \left(|\hat{\mathbf{R}}_x(\tau_0)| - \tilde{\mathbf{R}}_x^{\tau_0}[i] \right)^2$ 和峰值均方误差 $MSE_{\text{peak}} = (1/N_{\text{peaks}}) \sum_S \left(|\hat{\mathbf{R}}_x(\tau_0)| - \tilde{\mathbf{R}}_x^{\tau_0}[i] \right)^2$ 来比较 3 种方法的估计性能。

仿真结果如图 1 和图 2 所示, 图中左边的子图为整体均方误差, 右边的子图为峰值均方误差。从图中可以看

出,利用压缩感知思想只需少量压缩采样值就能够估计出循环自相关函数,且由于压缩感知重构本身是一个去噪过程,因此在有噪声的条件下整体均方误差优于传统估计方法。而基于字典的估计方法除了考虑稀疏先验之外,还利用了更多的结构信息,构造了循环自相关函数的字典等,使得估计性能优于基本的压缩感知估计方法。

但是上述估计方法都需要构造离散基或字典将整个循环频率域划分为有限个网格,如果真实的循环自相关函数峰值并不落在划分的网格上,就会引起基不匹配现象,造成循环自相关函数在给定的离散基或字典上并不稀疏,从而降低循环自相关函数的估计精确度。

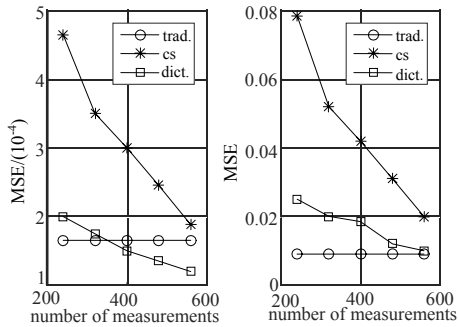


Fig.1 Number of random measurements vs. MSE

图 1 随机测量数与估计性能的关系

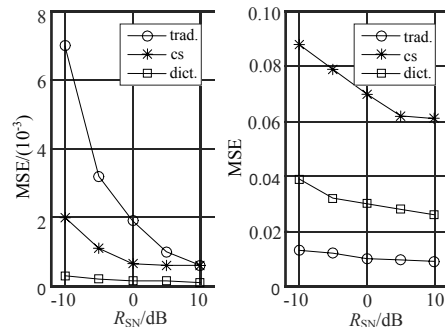


Fig.2 SNR vs. MSE

图 2 信噪比与估计性能的关系

图 3 和图 4 分别给出了无噪声条件下符号宽度为 $T_s = 8T_c$ 和 $T_s = 9T_c$ 的循环自相关函数估计性能。从图中可以看出,当符号宽度 $T_s = 8T_c$ 时,估计出的循环自相关函数在 k/T_s 处存在非零峰值,同时也发现在某些循环频率处的非零峰值并不是相邻频率的最大值,这会对设置门限确定循环频率支撑集的位置带来一定的困难。当符号宽度 $T_s = 9T_c$ 时,此时循环自相关函数的循环周期不再是整数周期,但假设的傅里叶变换基已经将连续的循环频率域划分为有限均匀的网格,造成了基不匹配问题,使得估计出的非零循环频率只能落在整数点上,与真实的循环频率支撑集有一定的误差。

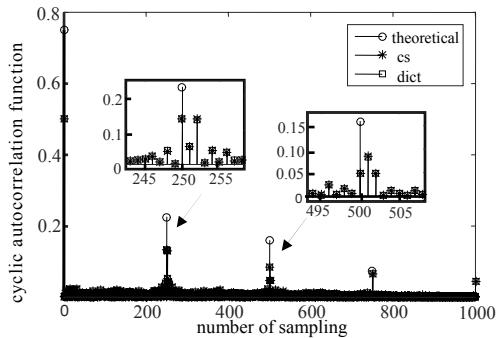


Fig.3 CA estimation based on compressive measurements, $T_s = 8T_c$

图 3 基于压缩感知思想的 CA 估计, $T_s = 8T_c$

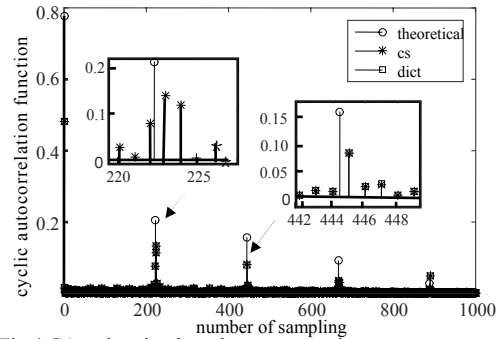


Fig.4 CA estimation based on compressive measurements, $T_s = 9T_c$

图 4 基于压缩感知思想的 CA 估计, $T_s = 9T_c$

图 5 给出了循环自相关函数的无网格估计性能,为了更好地体现无网格估计方法的优势,图 5 中只给出了不同随机测量数和信噪比条件下的峰值均方误差。从图中可以看出,基于无网格思想的估计方法没有对循环频率域进行离散化处理,利用原子范数约束循环自相关函数的稀疏性并保证其连续性,在求解过程中利用式(15)可以直接得到非零循环频率支撑集,不仅避免了噪声等因素对门限设置的影响,更重要的是能够以较高精确度对循环自相关函数进行估计。

3 结论

传统基于压缩感知的循环自相关函数估计方法通常假设循环自相关函数在离散傅里叶变换基下是稀疏的,而

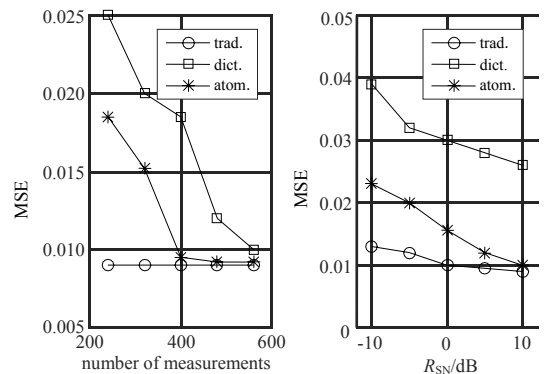


Fig.5 MSE of gridless CA estimation, $T_s = 9T_c$

图 5 循环自相关函数无网格估计性能, $T_s = 9T_c$

假定的变换基将连续循环频率域建模成有限个网格, 容易引起基不匹配问题。为此, 本文提出一种随机测量条件下的循环自相关函数无网格估计方法, 把估计问题转化为原子范数最小化问题, 利用其对偶问题的最优解来确定循环频率支撑集。仿真实验表明, 该方法能够有效降低循环自相关函数估计误差, 特别是针对非整数循环周期, 无网格估计方法的估计精确度更高。

参考文献:

- [1] DONOHO D L. Compressed sensing [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006,51(4):1289–1306.
- [2] CANDÈS E J, ROMBERG J, TAO T. Robust uncertainty principles: exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006,52(2):489–509.
- [3] CANDÈS E J. Compressive sampling [C]// Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Spain Madrid: [s.n.], 2006:1433–1452.
- [4] BARANIUK R G. Lecture notes: compressive sensing [J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2007,24(4):118–121.
- [5] CANDÈS E J, MICHAEL B Wakin. An introduction to compressive sampling [J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2007,25(2):21–30.
- [6] ELAD M. Sparse and Redundant Representations: from Theory to Applications in Signal and Image Processing [M]. Berlin: Springer, 2010.
- [7] DAVENPORT M A, BOUFONOS P T, WAKIN M B, et al. Signal processing with compressive measurements [J]. IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing, 2010,4(2):445–460.
- [8] RAMASAMY D, VENKATESWARAN S, MADHOU U. Compressive parameter estimation in AWGN [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2014,62(8):2012–2027.
- [9] CHEN X, ZHANG X, YANG J, et al. Cramer-Rao bounds for compressive frequency estimation [J]. IEEE Transactions on Fundamentals of Electronics Communications and Computer Sciences, 2015, E98.A(3):874–877.
- [10] WILLETT R M, MARCIA R F, NICHOLS J. Compressed sensing for practical optical imaging systems: a tutorial [J]. Optical Engineering, 2011,50(7):586.
- [11] HUANG H, MISRA S, TANG W, et al. Applications of compressed sensing in communications networks [EB/OL]. [2013-05-14]. <http://arXiv:1305.3002v1>.
- [12] MISHALI M, ELDARY C. Wideband spectrum sensing at sub-Nyquist rates [J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2011,28(4):102–135.
- [13] MISHALI M, ELDAR Y C. From theory to practice: sub-Nyquist sampling of sparse wideband analog signals [J]. IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing, 2009,4(2):375–391.
- [14] TIAN Z. Cyclic feature based wideband spectrum sensing using compressive sampling [C]// Proceedings of the 2011 IEEE International Conference on Communications. Kyoto, Japan: IEEE, 2011:1–5.
- [15] BOLLIG A, MATHAR R. Dictionary-based reconstruction of the cyclic autocorrelation via ℓ_1 -minimization for cyclostationary spectrum sensing [C]// Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing. Vancouver, Canada: IEEE, 2013:4908–4912.
- [16] DONOHO D, ELAD M. Optimally sparse representation in general (non-orthogonal) dictionaries via minimization [C]// Proc. Natl. Acad. Sci. USA: Nuhag, 2002:2197–2202.
- [17] STOJNIC M, XU W, HASSIBI B. Compressed sensing of approximately sparse signals [C]// IEEE Int. Symp. Inf. Theory, in Proc. Toronto, CA. USA: IEEE, 2008:2182–2186.
- [18] BARANIUK R, STEEGHS P. Compressive radar imaging [C]// National Radar Conference. Massachusetts: IEEE, 2007:128–133.
- [19] BAJWA W U, HAUPT J, SAYEED A M, et al. Compressed channel sensing: a new approach to estimating sparse multipath channels [J]. Proc. of the IEEE, 2010,98(6):1058–1076.
- [20] HERMAN M A, STROHMER T. High-resolution radar via compressed sensing [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2009,57(6):2275–2284.
- [21] TANG G, BHASKAR B N, SHAH P, et al. Compressed sensing of the grid [J]. IEEE Trans. Inf. Theory, 2013,59(11):7465–7490.
- [22] YANG Z, XIE L. On gridless sparse methods for line spectral estimation from complete and incomplete data [J]. IEEE Trans. Signal Process., 2015,63(12):3139–3153.
- [23] CHANDRASEKARAN V, RECHT B, PARRILO P A, et al. The convex geometry of linear inverse problems [J]. Foundations of Computational Mathematics, 2012,12(6):805–849.
- [24] BHASKAR B N, TANG G G, RECHT B. Atomic norm denoising with applications to line spectral estimation [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2013,61(23):5987–5999.