

文章编号: 2095-4980(2017)05-0745-07

光滑曲面上测地线射线寻迹算法及爬行波计算

邹 宁, 杨 杨, 吴语茂*

(复旦大学 电磁波信息科学教育部重点实验室, 上海 200433)

摘 要: 提出了一种光滑凸曲面上的一致性几何绕射理论(UTD)爬行波射线寻迹算法, 该算法结合泰勒级数, 并根据测地线的相关性质, 使用计算几何方法对暗区爬行波射线进行寻迹; 在参数曲面片上根据测地线性质求解爬行波轨迹点, 并对爬行波在任意一点处的测地曲率进行计算, 结果准确度高。最后使用该算法结合 UTD 方法计算二维圆柱的散射场, 得到的结果与级数解吻合, 验证了本文算法的有效性, 扩展了 UTD 方法在实际工程中的应用。

关键词: 一致性几何绕射理论; 测地线; 爬行波; 射线寻迹

中图分类号: TN914.42

文献标志码: A

doi: 10.11805/TKYDA201705.0745

Geodesic ray tracing algorithm and calculation of traveling wave on smooth surface

ZOU Ning, YANG Yang, WU Yumao*

(Key Laboratory for Information Science of Electromagnetic Waves, Fudan University, Shanghai 200433, China)

Abstract: A creeping ray tracing algorithm of Uniform Geometrical Theory of Diffraction (UTD) method on the smooth convex surface is given. The algorithm combines with the Taylor series, and according to the related property of the geodesic, the creeping rays in shadow region are traced by computational geometry method. The discrete points of the creeping wave are obtained based on the property of geodesic on the parametric surface. The geodesic curvatures of every point at creeping wave are calculated and the high frequency results are obtained. Finally, the scattered field of two-dimensional cylinder is calculated by combining the algorithm with UTD method. The results obtained are in well agreements with the series solution, which verifies the effectiveness of the proposed algorithm. The application of UTD method in practical engineering is extended.

Keywords: Uniform Geometrical Theory of Diffraction; geodesic; creeping wave; ray tracing

在研究电大目标的高频电磁特性问题时, 一致性几何绕射理论(UTD)^[1]是广泛采用的方法。当利用UTD方法来计算物体的电磁特性和雷达散射截面(RCS)时, 必须考虑暗区中爬行波的贡献。因此, 研究表面上的UTD方法, 首先需要解决表面上的射线寻迹算法, 一旦得到了爬行波的路径, 就能计算暗区电磁散射的贡献。

对于规则物体, 如圆锥、圆柱^[2-3]、椭球和抛物面^[4]的爬行波射线的寻迹, 可以通过解析的方法进行求解^[5-6]。根据费马原理, 任意表面上的爬行波轨迹与该表面上的测地线(短程线)是一致的, 而在微分几何中, 测地线微分方程可以作为求解测地线的依据。目前常见的微分方程解法是差分法, 该方法简单明了, 但传统的差分法^[7-8]对于复杂问题往往得不到精确的结果, 原因在于差分法具有离散误差和截断误差。而龙格-库塔方法^[9]则是一种稳定准确的数值方法, 四阶的龙格-库塔法更是以其效率和精确度而被广泛用于诸多实际问题中。相对于差分方法, 龙格-库塔算法的精确度更高, 但该方法的计算时间也增加了。

本文实现了一种基于测地线性质的爬行波寻迹算法, 该算法实现简单, 且精确度高, 有效扩展了UTD在实际工程中的应用。

收稿日期: 2016-05-25; 修回日期: 2016-07-05

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61401103); 上海市国家自然科学基金资助项目(14ZR1402400); 毫米波国家重点实验室基金资助项目(K201505)

*通信作者: 吴语茂 email:yumaowu@fudan.edu.cn

1 爬行波寻迹算法

在微分几何中, 给出平面上一初等区域 G , G 中各点的笛卡儿坐标是 (u, v) , 则曲面可以用参数方程表示:

$$x = f_1(u, v), y = f_2(u, v), z = f_3(u, v) \quad (u, v) \in G \quad (1)$$

通常为了表示方便, 把曲面的参数方程简写成向量函数的形式:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) \quad (u, v) \in G \quad (2)$$

在光滑曲面上, 爬行波轨迹与测地线是一致的。对于式(2)所定义参数曲面 $\mathbf{r}(u, v)$ 而言, 爬行波上每一点的坐标向量可以表示为 $\mathbf{r}(u(s), v(s))$, 其中 s 为曲线的弧长。在数值计算中, 可以用一系列离散的轨迹点 $(u(i), v(i))$ 来近似一条连续的爬行波轨迹, 其中 $i=1, 2, 3, \dots$ 。

第 $i+1$ 个点的参数 $(u(i+1), v(i+1))$ 可表示为第 i 个点的参数 $(u(i), v(i))$ 的泰勒级数展开值:

$$\begin{cases} u(i+1) = u(i) + \Delta_u \frac{du(i)}{ds} + \frac{1}{2!} \Delta_u^2 \frac{d^2u(i)}{ds^2} + \dots \\ v(i+1) = v(i) + \Delta_v \frac{dv(i)}{ds} + \frac{1}{2!} \Delta_v^2 \frac{d^2v(i)}{ds^2} + \dots \end{cases} \quad (3)$$

式中: Δ_u 和 Δ_v 是曲线上 2 个相邻轨迹点之间参数 u, v 的步长。对于近似的数值计算, 取泰勒级数展开的前 2 项, 并令 $\Delta_u = \Delta_v$, 于是点 $(u(i+1), v(i+1))$ 可表示为:

$$\begin{cases} u(i+1) = u(i) + \Delta \frac{du(i)}{ds} \\ v(i+1) = v(i) + \Delta \frac{dv(i)}{ds} \end{cases} \quad (4)$$

在微分几何中, 式(4)中的 $\frac{du(i)}{ds}$ 和 $\frac{dv(i)}{ds}$ 可以用来表示爬行波在点 $(u(i), v(i))$ 处的传播方向:

$$\boldsymbol{\tau}(i) = \frac{du(i)}{ds} \cdot \mathbf{r}_u(i) + \frac{dv(i)}{ds} \cdot \mathbf{r}_v(i) \quad (5)$$

式中 $\mathbf{r}_u(i)$ 和 $\mathbf{r}_v(i)$ 为第 i 个点 $(u(i), v(i))$ 处的参数偏导。当给定已知的初始坐标和入射方向, 结合式(4)和式(5), 第 $i+1$ 个点 $(u(i+1), v(i+1))$ 可以通过第 i 个点 $(u(i), v(i))$ 和方向 $\boldsymbol{\tau}(i)$ 求出, 其中 $i \geq 0$ 。因此, 基于测地线性质的爬行波轨迹点寻迹递推算法的处理过程如图 1 所示。

如图 1 所示, 已知点 $(u(0), v(0))$ 和 $\boldsymbol{\tau}(0)$, 结合式(4)和式(5), 可以得到点 $(u(1), v(1))$ 。为了实现逐点求解爬行波轨迹点 $(u(i), v(i))$ 的递推过程, 需建立一个由点 $(u(i), v(i))$, $(u(i+1), v(i+1))$ 和方向 $\boldsymbol{\tau}(i)$ 求解方向 $\boldsymbol{\tau}(i+1)$ 的方法。

如图 2 所示, 点 $(u(i), v(i))$ 的局部直角坐标系定义为: $\{\hat{\mathbf{r}}_u(i), \hat{\mathbf{r}}_v(i), \hat{\mathbf{n}}(i)\}$, 则该点的方向和法向量可以表示为:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\tau}(i) = \frac{du(i)}{ds} \cdot \mathbf{r}_u(i) + \frac{dv(i)}{ds} \cdot \mathbf{r}_v(i) \\ \hat{\mathbf{n}}(i) = \hat{\mathbf{r}}_u(i) \times \hat{\mathbf{r}}_v(i) \end{cases} \quad (6)$$

同理, 点 $(u(i+1), v(i+1))$ 的局部坐标系为 $\{\hat{\mathbf{r}}_u(i+1), \hat{\mathbf{r}}_v(i+1), \hat{\mathbf{n}}(i+1)\}$, 于是该点处的寻迹方向和法向量为:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\tau}(i+1) = \frac{du(i+1)}{ds} \cdot \mathbf{r}_u(i+1) + \frac{dv(i+1)}{ds} \cdot \mathbf{r}_v(i+1) \\ \hat{\mathbf{n}}(i+1) = \hat{\mathbf{r}}_u(i+1) \times \hat{\mathbf{r}}_v(i+1) \end{cases} \quad (7)$$

求 $\boldsymbol{\tau}(i+1)$ 关键是确定点 $(u(i+1), v(i+1))$ 处的 $\frac{du(i+1)}{ds}$ 和 $\frac{dv(i+1)}{ds}$ 。

$(u(i), v(i))$ 和 $(u(i+1), v(i+1))$ 处的两局部坐标系坐标轴之间的角度见表 1。

通过坐标系之间的过渡矩阵, $\{\hat{\mathbf{r}}_u(i), \hat{\mathbf{r}}_v(i), \hat{\mathbf{n}}(i)\}$ 可以通过 $\{\hat{\mathbf{r}}_u(i+1), \hat{\mathbf{r}}_v(i+1), \hat{\mathbf{n}}(i+1)\}$ 表示:

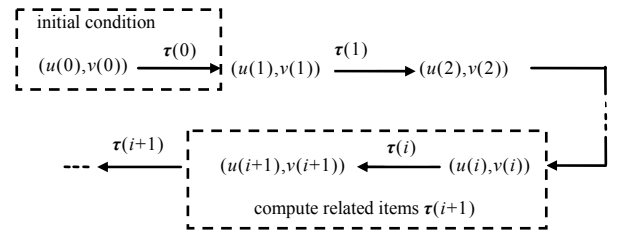


Fig.1 Flow chart of the creeping wave algorithm
图1 爬行波算法流程图

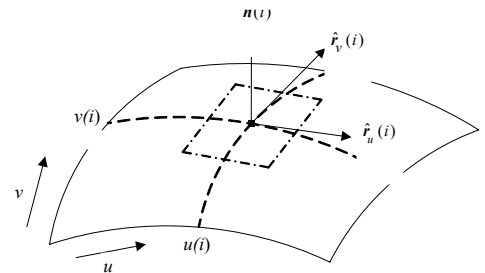


Fig.2 Local rectangular coordinates of points on a parametric surface
图2 参数曲面上点的局部直角坐标系

表1 坐标轴之间的角度
Table1 Angle between the coordinate axes

	$\hat{\mathbf{r}}_u(i+1)$	$\hat{\mathbf{r}}_v(i+1)$	$\hat{\mathbf{n}}(i+1)$
$\{\hat{\mathbf{r}}_u(i)\}$	θ_{uu}	θ_{uv}	θ_{un}
$\{\hat{\mathbf{r}}_v(i)\}$	θ_{vu}	θ_{vv}	θ_{vn}
$\{\hat{\mathbf{n}}(i)\}$	θ_{nu}	θ_{nv}	θ_{nn}

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{r}}_u(i) \\ \hat{\mathbf{r}}_v(i) \\ \hat{\mathbf{n}}(i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{r}}_u(i+1) \\ \hat{\mathbf{r}}_v(i+1) \\ \hat{\mathbf{n}}(i+1) \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\text{式中} \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{uu} & \cos \theta_{uv} & \cos \theta_{un} \\ \cos \theta_{vu} & \cos \theta_{vv} & \cos \theta_{vn} \\ \cos \theta_{nu} & \cos \theta_{nv} & \cos \theta_{nn} \end{bmatrix} \circ$$

因此, 式(6)中的 $\boldsymbol{\tau}(i)$ 可以表示为:

$$\boldsymbol{\tau}(i) = \frac{du(i)}{ds} \cdot \mathbf{r}_u(i) + \frac{dv(i)}{ds} \cdot \mathbf{r}_v(i) = A \cdot \hat{\mathbf{r}}_u(i+1) + B \cdot \hat{\mathbf{r}}_v(i+1) + C \cdot \hat{\mathbf{n}}(i+1) \quad (9)$$

$$\text{式中} \begin{cases} A = T_{11} \cdot |\mathbf{r}_u(i)| \cdot \frac{du(i)}{ds} + T_{21} \cdot |\mathbf{r}_v(i)| \cdot \frac{dv(i)}{ds} \\ B = T_{12} \cdot |\mathbf{r}_u(i)| \cdot \frac{du(i)}{ds} + T_{22} \cdot |\mathbf{r}_v(i)| \cdot \frac{dv(i)}{ds} \\ C = T_{13} \cdot |\mathbf{r}_u(i)| \cdot \frac{du(i)}{ds} + T_{23} \cdot |\mathbf{r}_v(i)| \cdot \frac{dv(i)}{ds} \end{cases} \circ$$

曲线上一点处的主法向量定义为: $\mathbf{N}(s) = \frac{d\boldsymbol{\tau}(s)}{ds}$, 在数值计算中, 可以表示为:

$$\mathbf{N}(i+1) = \frac{d\boldsymbol{\tau}(i+1)}{ds} \approx \frac{\boldsymbol{\tau}(i+1) - \boldsymbol{\tau}(i)}{\Delta} \quad (10)$$

因此, 结合式(7)和式(9), 点 $(u(i+1), v(i+1))$ 处的主法向量为:

$$\mathbf{N}(i+1) = \frac{\boldsymbol{\tau}(i+1) - \boldsymbol{\tau}(i)}{\Delta} = \frac{\left(\frac{du(i+1)}{ds} \cdot |\mathbf{r}_u(i+1)| - A \right) \cdot \hat{\mathbf{r}}_u(i+1) + \left(\frac{dv(i+1)}{ds} \cdot |\mathbf{r}_v(i+1)| - B \right) \cdot \hat{\mathbf{r}}_v(i+1) - C \cdot \hat{\mathbf{n}}(i+1)}{\Delta} \quad (11)$$

根据式(11), 为了确保 $\mathbf{N}(i+1)$ 与曲面的法向量平行, 需要:

$$\begin{cases} \frac{du(i+1)}{ds} = \frac{A}{|\mathbf{r}_u(i+1)|} \\ \frac{dv(i+1)}{ds} = \frac{B}{|\mathbf{r}_v(i+1)|} \end{cases} \quad (12)$$

求出 $\frac{du(i+1)}{ds}$ 和 $\frac{dv(i+1)}{ds}$ 后, 式(7)中爬行波电大方向 $\boldsymbol{\tau}(i+1)$ 便可以确定, 最后结合泰勒公式(4)就可以算出 $(u(i+1), v(i+1))$, 通过图1中的递推过程就可以实现爬行波射线的寻迹。

2 典型物体上爬行波的寻迹结果

根据测地线的定义, 当一条曲面上任意一点的测地曲率为零时, 该曲线就被称为测地线。因此, 可以把通过测地线性方法计算得到的所有离散点的测地曲率与标准值零进行对比, 从而验证算法的准确性。典型物体上爬行波的寻迹结果如图3~图5所示, 同时给出了爬行波上每一个离散点的测地曲率。

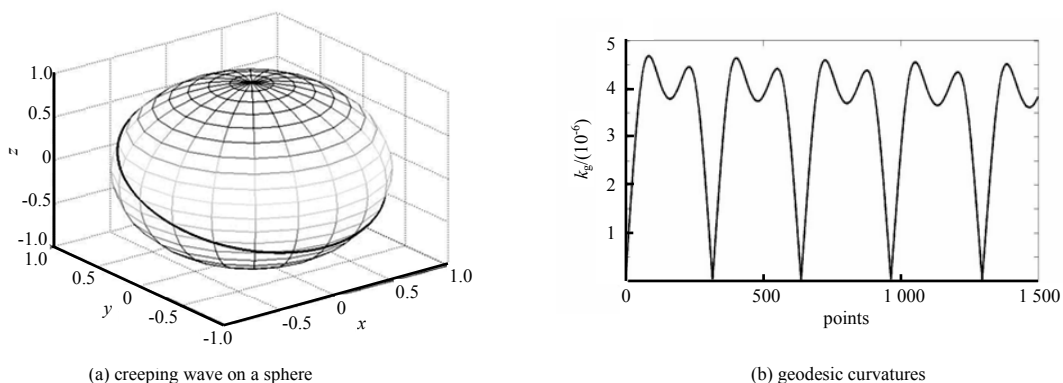


Fig.3 Results of creeping wave tracing on a sphere

图3 球表面爬行波寻迹结果

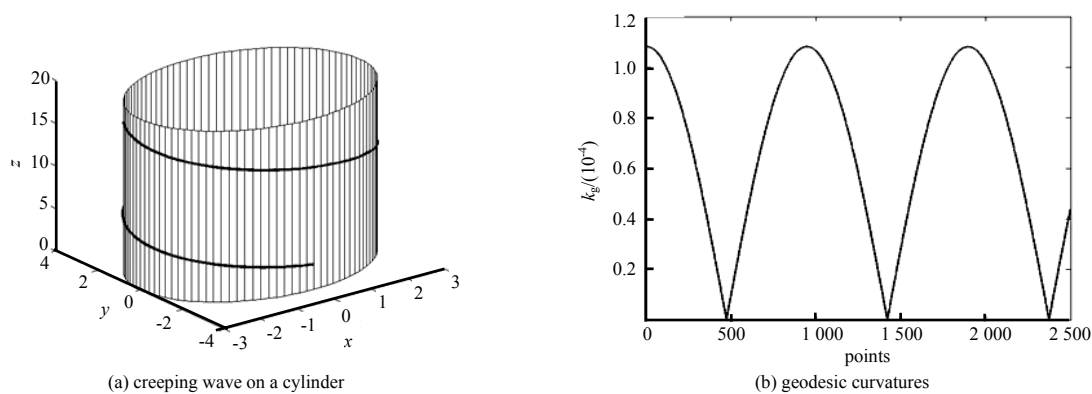


Fig.4 Results of creeping wave tracing on a cylinder

图 4 圆柱表面爬行波寻迹结果

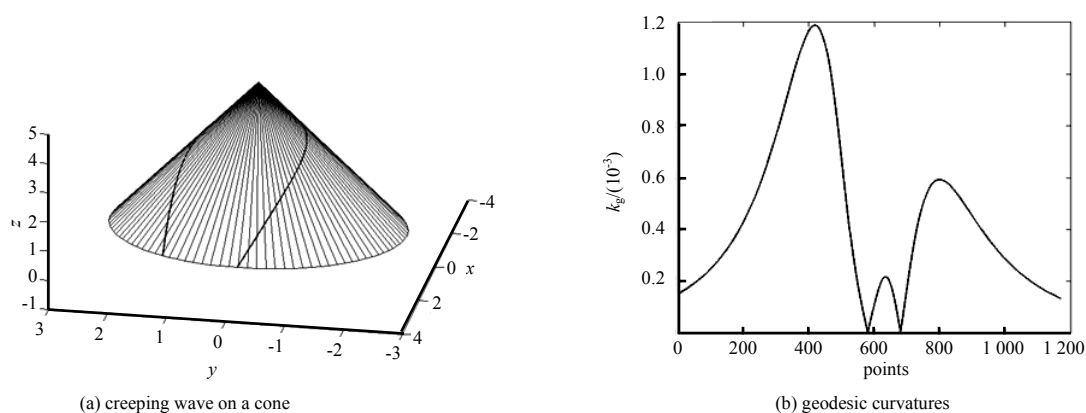


Fig.5 Results of creeping wave tracing on a cone

图 5 圆锥表面爬行波的寻迹结果

理论上对于式(3),当取泰勒级数前 2 项时,截断误差为 $o(\Delta)$,为了分析在泰勒级数中取高阶导数对测地曲率结果的影响,图 6~图 8 比较了取泰勒级数的前 2 项和前 3 项的测地曲率结果,并假设取前 2 项的测地曲率为 k_{g2} ,取前 3 项的测地曲率为 k_{g3} ,并给出了 $k_{g2}-k_{g3}$ 的误差结果。

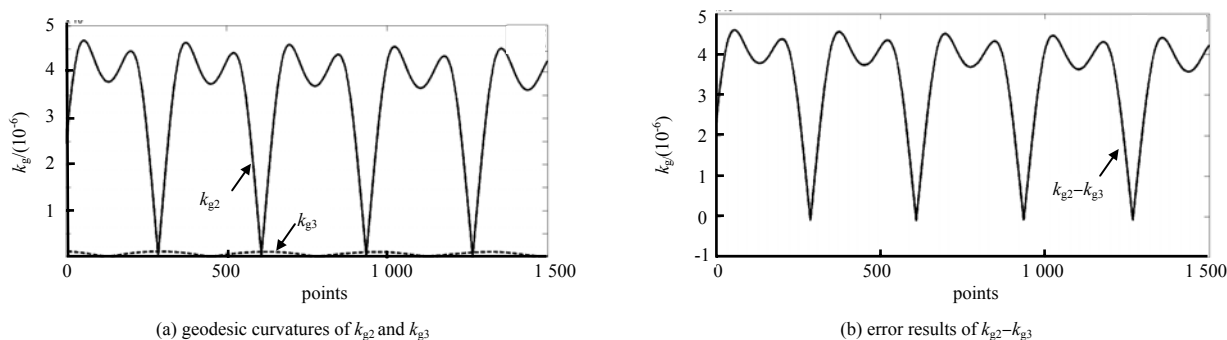


Fig.6 Truncation error of creeping wave tracing on a sphere

图 6 球表面爬行波的截断误差

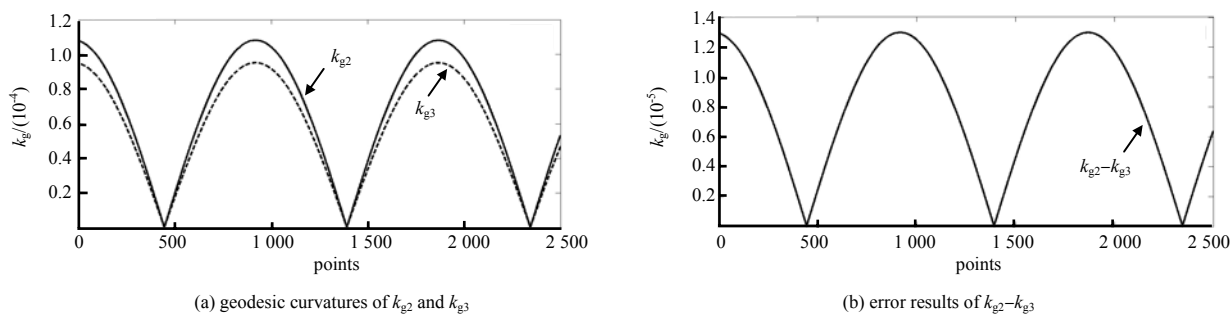


Fig.7 Truncation error of creeping wave tracing on a cylinder

图 7 圆柱表面爬行波的截断误差

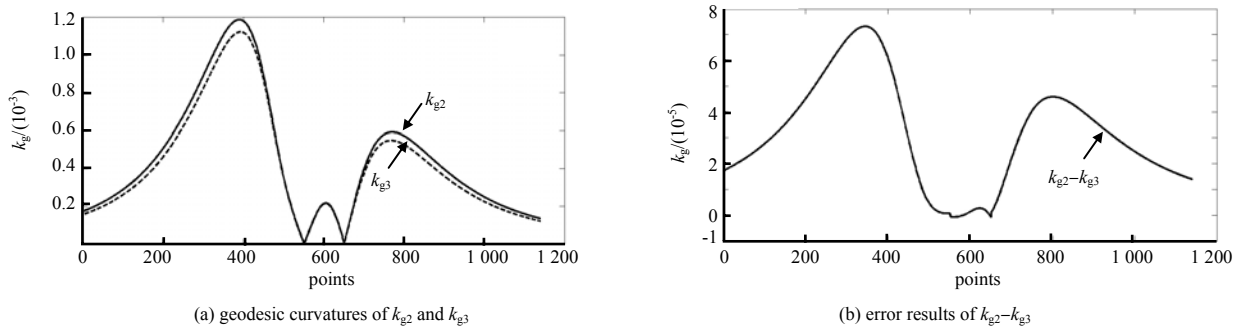


Fig.8 Truncation error of creeping wave tracing on a cone

图8 圆锥表面爬行波的截断误差

爬行波上每一点处测地曲率的理论值为零。从图 3~图 5 中可以看出, 所有通过测地线性质方法计算得到的轨迹点处测地曲率的值都非常接近零, 证明了测地线性质方法的精确性和稳定性。根据式(4)和式(12)可知, 当曲面对参数的偏导数存在时($\hat{r}_u(i)$ 和 $\hat{r}_v(i)$ 不等于 0), 爬行波算法是有效的。当曲面上存在导数不连续的尖点时, 不存在爬行波, 该点的散射场由尖点绕射决定, 由于尖点绕射是一种非常弱的绕射现象, 一般在实际的应用中不需要考虑。根据图 6~图 8 的结果可知, 对于一般的工程应用, 取泰勒级数的前 2 项就可以达到理想的精确度。

3 电大尺寸凸圆柱体绕射场的数值计算

电大复杂物体目标电磁散射的计算主要使用高频渐进方法, 这些方法分为 2 类: 基于感应电流的物理光学法(Physical Optics, PO)^[10]与基于射线理论的几何光学法(Geometrical Optics, GO)。经典的 GO 和 PO 方法仅仅考虑了散射体亮区的作用, 无法计算阴影区的贡献, 为解决这些问题, 凯勒引入了几何绕射理论(GTD)^[11], 随后, 帕塔克进一步引入了一致性几何绕射理论^[12], 解决了 GTD 在阴影区与亮区之间的过渡区不连续的问题。使用 UTD 方法计算表面绕射场, 需要计算沿物体表面的测地线, 首先给出圆柱体的 UTD 解, 圆柱体的散射场可以分为如图 9(a)的亮区与如图 9(b)的暗区, 在亮区 P_L 点的电磁场可以表示为^[13]:

$$u(P_L) = u^{\text{inc}}(P_L) + u^{\text{inc}}(Q_R) \left\{ -\sqrt{\frac{4}{\xi'}} e^{-j\frac{(\xi')^3}{12}} \left[\frac{e^{-j(\pi/4)}}{2\xi'\sqrt{\pi}} (1 - F(kL'a')) + P_{s,h}(\xi') \right] \right\} \sqrt{\frac{\rho^\gamma}{\rho^\gamma + l}} e^{-jkl} \quad (13)$$

式中: u^{inc} 为入射场; $\xi' = -2p \cos \theta' \leq 0$; $L' = l$ 为反射点到观察点的距离; $\rho^\gamma = a \cos \theta' / 2$; $F(X)$ 为菲涅尔过渡函数; $P_{s,h}(\xi')$ 为 Pekeris 函数。对于观察点位于阴影区的 P_s 点, 其爬行波场可以表示为:

$$u(P_s) = -u(Q_L) p \sqrt{\frac{2}{k}} e^{-jkt} \left\{ \frac{e^{-j(\pi/4)}}{2\xi'\sqrt{\pi}} [1 - F(kL\tilde{a})] + P_{s,h}(\xi') \right\} e^{-jks} \quad (14)$$

式中: $u^{\text{inc}}(Q_L) = u_0$; $t = a\theta$ 为沿逆时针方向传播的爬行波的距离; $\tilde{a} = \theta^2 / 2$; $\xi = p\theta \geq 0$, $p = (ka/2)^{1/3}$; $L = s$ 为离开圆柱体的点到观察点的距离。

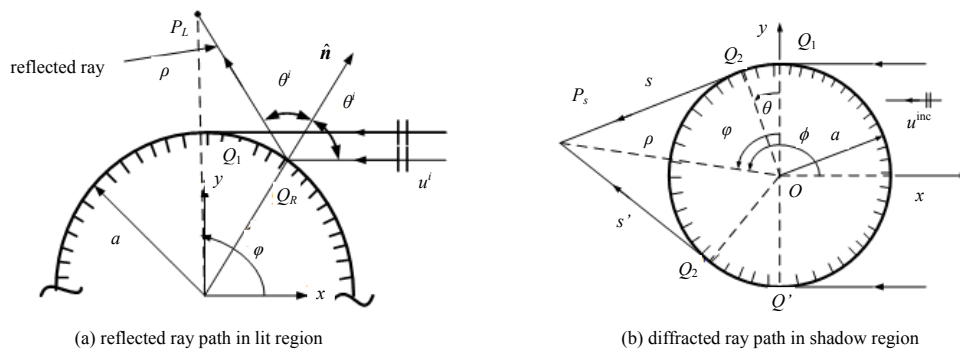


Fig.9 Reflected and diffracted ray paths of circular cylinder

图9 圆柱体反射波传播路径与绕射波传播路径

为验证 UTD 方法在计算目标电磁散射^[14]时的准确性, 以及本文提出的测地线在爬行波计算中的可行性, 考虑图 9 所示的二维圆柱体电磁散射问题, 图 10 给出了使用 UTD 计算这一目标散射场总场与级数解的对比。

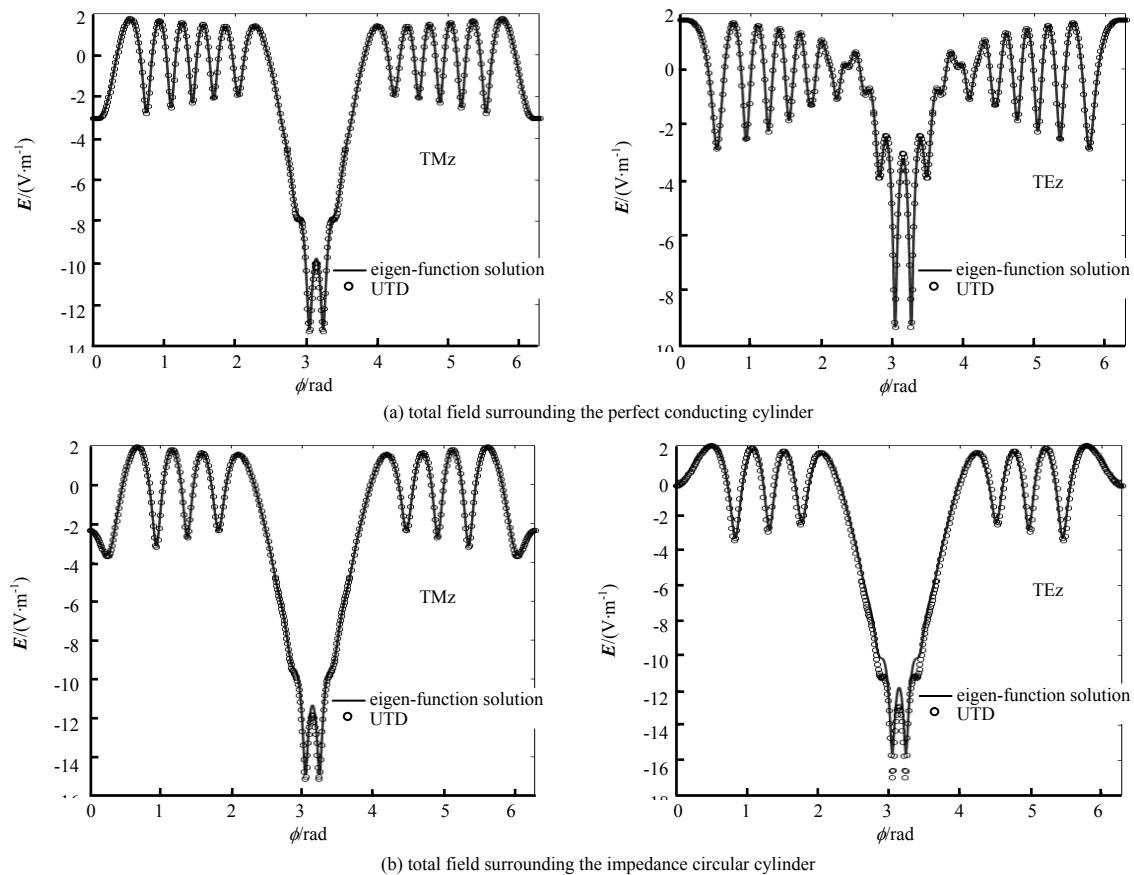


Fig.10 Total field surrounding the circular cylinder excited by the plane wave
图 10 圆柱体在平面波入射下的总场

图 10(a)表示理想导电圆柱体在 TMz(左图)与 TEz(右图)平面波入射下的总场,其中 $\phi'=0$,圆柱的半径 $a=2\lambda$, $\rho=5\lambda$;图 10(b)为阻抗边界条件圆柱体在 TMz(左图)与 TEz(右图)平面波入射下的总场,其中 $\phi'=0$,圆柱的半径 $a=2\lambda$, $\rho=5\lambda$ 。由图得到,使用 UTD 方法,可以计算理想导电圆柱体以及阻抗边界条件圆柱体周围的散射场;所得到的总场在阴影与亮区的过渡地带仍保持了较好的连续性;通过与级数解的对比,得出 UTD 方法在亮区可以得到较好的计算结果,在阴影区也可以得到由爬行波贡献的场。这一结果验证了本文提出的爬行波射线寻迹的正确性,以及工程上的可实现性。

4 结论

本文根据测地线的性质提出了一种新的爬行波寻迹算法,首先利用参数曲面进行建模,根据泰勒级数得到轨迹上各点的递推公式,再结合测地线的特性对爬行波的轨迹进行寻迹,并求出了爬行波上每一个离散点的测地曲率,得到结果与理论值零比较接近,验证了算法的精确度。最后通过把该算法应用到 UTD 中计算了圆柱的散射场,得到的电场强度与级数解吻合,进一步验证了算法的有效性。

参考文献:

- [1] AGUILAR A G, PATHAK P H, SIERRA-PEREZ M. A canonical UTD solution for electromagnetic scattering by an electrically large impedance circular cylinder illuminated by an obliquely incident plane wave[J]. IEEE Transactions on Antennas & Propagation, 2013, 61(10): 5144-5154.
- [2] CHAN K K, FELSEN L B, HESSEL A et al. Creeping waves on a perfectly conducting cone[J]. IEEE Transactions on Antennas & Propagation, 1977, 25(5): 661-670.
- [3] LEE S W, YUNG E, MITTRA R. G.T.D. solution of slot admittance on a cone or cylinder[J]. Proceedings of the Institution of Electrical Engineers, 1979, 126(6): 487-492.

- [4] JHA R M, WIESBECK W. The geodesic constant method: a novel approach to analytical surface-ray tracing on convex conducting bodies[J]. IEEE Antennas & Propagation Magazine, 1995, 37(2): 28–38.
- [5] 宗卫华, 梁昌洪, 曹祥玉, 等. 圆锥体与圆柱体的几何绕射理论绕射线寻迹[J]. 西安电子科技大学学报(自然科学版), 2002, 29(4): 482–485. (ZONG Weihua, LIANG Changhong, CAO Xiangyu, et al. Diffraction ray tracing of GTD on the cone and cylinder[J]. Journal of Xidian University, 2002, 29(4): 482–485.)
- [6] 梁昌洪, 崔斌, 宗卫华. 费马原理确定柱面和锥面反射点的解析表示式[J]. 电波科学学报, 2004, 19(2): 153–156. (LIANG Changhong, CUI Bin, ZONG Weihua. Analytical formulas for reflection ray tracing on the cylinder and cone based on the Fermat principle[J]. Chinese Journal of Radio Science, 2004, 19(2): 153–156.)
- [7] WANG N, ZHANG Y, LIANG C H. Creeping ray-tracing algorithm of UTD method based on nurbsmodels with the source on surface[J]. Journal of Electromagnetic Waves & Applications, 2006, 20(14): 1981–1990.
- [8] SEFI S. Ray Tracing Tools for High Frequency Electromagnetics Simulations[M]. [S.l.]: ELSEVIER, 2003.
- [9] WEILE D S. A hybrid Runge-Kutta convolution quadrature-temporal galerkin approach to the solution of the time domain integral equations of electromagnetics[C]// International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications. Palm Beach, Netherlands Antilles: IEEE, 2014: 391–394.
- [10] WU Y M, JIANG L J, SHA W E I, et al. The numerical steepest descent path method for calculating physical optics integrals on smooth conducting quadratic surfaces[J]. IEEE Transactions on Antennas & Propagation, 2013, 61(8): 4183–4193.
- [11] KELLER J B. Geometrical theory of diffraction[J]. Journal of the Optical Society of America, 1962, 52(2): 116.
- [12] PATHAK P H. An asymptotic analysis of the scattering of plane waves by a smooth convex cylinder[J]. Radio Science, 1979, 14(14): 419–435.
- [13] PATHAK P H, BURNSIDE W D, MARHEFKA R J. A uniform GTD analysis of the diffraction of electromagnetic waves by a smooth convex surface[J]. IEEE Transactions on Antennas & Propagation, 1980, 28(5): 631–642.
- [14] 王健, 顾长青, 李茁, 等. GPU加速混合场积分方程求解导体目标散射问题[J]. 太赫兹科学与电子信息学报, 2014, 12(1): 67–70. (WANG Jian, GU Changqing, LI Zhuo, et al. Acceleration of CFIE for solving conductor target scattering problems by exploiting the GPU[J]. Journal of Terahertz Science and Electronic Information Technology, 2014, 12(1): 67–70.)

作者简介:



邹 宁(1991–), 男, 湖南省邵阳市人, 在读硕士研究生, 主要研究方向为计算电磁学.
email: nzou14@fudan.edu.cn.

杨 杨(1992–), 男, 安徽省淮南市人, 在读硕士研究生, 主要研究方向为计算电磁学.

吴语茂(1982–), 男, 山东省烟台市人, 副研究员, 主要从事非均匀介质中的场与波、计算电磁学、电磁散射与辐射研究.