

文章编号: 2095-4980(2019)03-0474-08

Oldham 分形链与 Liu-Kaplan 分形链分抗的阻纳函数求解

高小龙, 袁 晓, 施卜椿

(四川大学 电子信息学院, 四川 成都 610064)

摘 要: 针对 Oldham RC 分形链类的电路特征, 给定初始阻抗, 采用 3 种方法理论推导 Oldham 分形链类阻抗函数解析表达式, 并对比分析各求解方法。根据 Oldham 分形链分抗逼近电路的连分式表示和连分式三项递推公式, 引入阻抗函数新的数学表示形式: 连分式三项递推矩阵。通过分析 Liu-Kaplan 标度迭代电路和标度方程, 推导出 2 种 Liu-Kaplan 分形链类阻抗函数的数学表示形式。通过理论验证和实验仿真对比不同分数阶下的阻抗函数表达式和频域特征与运算特征曲线。

关键词: 分数微积分; 分形分抗; 迭代电路; 标度拓展; 非正则标度方程

中图分类号: TN701

文献标志码: A

doi: 10.11805/TKYDA201903.0474

Immittance functions solution of Oldham fractal Chain and Liu-Kaplan fractal chain fractance

GAO Xiaolong, YUAN Xiao, SHI Buchun

(College of Electronic and Information Engineering, Sichuan University, Chengdu Sichuan 610064, China)

Abstract: Aiming for the circuit characteristics of the Oldham RC fractal chain, the analytical expressions of Oldham RC fractal chain impedance function are deduced by using three methods at given initial impedances. Then, the solution methods are compared and analyzed. According to the continued fractional representation of the approximation circuit of Oldham fractal chain fractance, and the three-term recurrence formula of continuous fraction, a new mathematical representation of impedance function is introduced: continuous fractional three-term recursion matrix. By analyzing the Liu-Kaplan scaling iteration circuit and the scaling equations, two mathematical representations of the impedance functions of Liu-Kaplan fractal chains are deduced. Theoretical and experimental simulations compare the impedance function expressions and frequency characteristics of different fractional orders.

Keywords: fractional calculus; fractal fractance; iterating circuit; scaling extension; irregular scaling equation

Oldham 是在 20 世纪 70 年代初引进在低频段具有半阶积分运算性能的一种规则分形链结构——Oldham I 型分形链电路^[1-4]。文献[5]通过对偶原理提出同样具有负半阶运算性能的 II 型、III 型、IV 型分形链电路, 构成 Oldham 分形链类分抗逼近电路^[5-9], 并使用归一化原型电路和迭代电路模型建立起简洁的数学描述。Oldham I 型和 IV 型分形链电路在低频段具有负半阶运算性能, Oldham II 型和 III 型分形链电路在高频段具有负半阶运算性能。

1985 年, Liu 根据规则康托分形棒电极, 建立了一个可获得任意 $\mu(0 < \mu < 1)$ 阶积分运算的双支树 RC 串-并联结构电路模型——Liu 分形树分抗逼近电路。Kaplan 根据 Liu 分形树电路阻抗函数的连分式表达形式, 将其转化成等价的 RC 分形链电路模型——Liu-Kaplan I 型分形链电路^[10-12], 调节电路中的电阻递进比(α)与电容递进比(β)在低频段可获得任意 $\mu(0 < \mu < 1)$ 阶积分运算性能。

文献[7]对比分析 Oldham I 型分形链和 Liu-Kaplan I 型分形链分抗逼近电路, 将具有半阶运算性能的 Oldham 分形链类分抗逼近电路, 类比拓展获得具有任意 $\mu(0 < \mu < 1)$ 阶运算性能的新型 Liu-Kaplan 分形链类分抗逼近电路和对应的新型 Liu-Kaplan 标度方程。4 种新型 Liu-Kaplan 分形链分抗与对应 Oldham 分形链分抗的运算有效频段一致。

在理论上分析与研究 Oldham 分形链类与 Liu-Kaplan 分形链类分抗逼近电路的运算特征和逼近性能,必须获得电路阻抗函数表达式。本文将用连分式展开法、传输参量矩阵法、连分式三项递推矩阵分解法,求得 Oldham 分形链类电路的阻抗函数;用标度迭代矩阵法、连分式三项递推矩阵法求得 Liu-Kaplan 分形链类电路的阻抗函数。首先用阻纳函数统一描述互为对偶的电路;接着用 3 种方法推导电路的阻抗函数解析表达式,重点论述连分式三项递推矩阵;最后从 Liu-Kaplan 标度方程出发,用 2 种方法求解 Liu-Kaplan 分形链类分抗逼近电路。

1 Oldham 分形链类分抗逼近电路的阻抗函数求解

1.1 Oldham 分形链类分抗的数学描述——迭代电路和迭代方程

Oldham I 型分抗逼近电路(如图 1 所示)的输入阻抗序列为 $\{Z_k(s), k \in \mathbf{N}\}$, 在给定初始阻抗 $Z_0(s)$ 时, 由迭代公式算出:

$$Z_k(s) = R + \frac{1}{Cs + \frac{1}{Z_{k-1}(s)}}, \quad k \in \mathbf{N} \quad (1)$$

令:

$$\tau = RC, \quad w = \tau s, \quad y_k(w) = \frac{Z_k(s)}{R} \quad (2)$$

式中: R 代表电阻值; C 代表电容值; s 是拉普拉斯变量; w 称为归一化运算变量; $y_k(w)$ 是归一化阻抗函数。得到归一化迭代公式

$$y_k(w) = F(y_{k-1}(w)) = 1 + \frac{1}{w + \frac{1}{y_{k-1}(w)}}, \quad k \in \mathbf{N} \quad (3)$$

式(3)在数学上完全表征了 Oldham I 型分形链电路结构特点和运算性能。

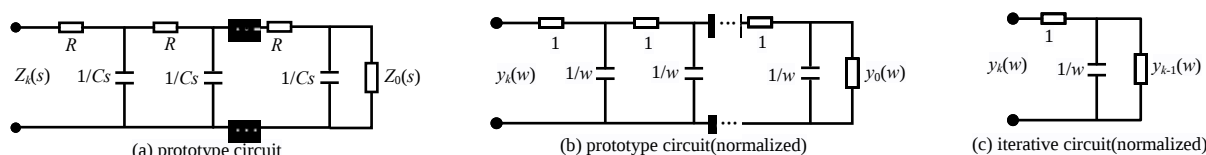


Fig.1 Fractance approximation circuit of Oldham I fractal chain

图 1 Oldham I 型分形链分抗逼近电路

对于 Oldham II 型, 根据电路并串联结构特点, 其归一化输入导纳序列 $\{y_k(w)\}$ 由迭代公式得出:

$$y_k(w) = 1 + \frac{1}{w^{-1} + \frac{1}{y_{k-1}(w)}}, \quad k \in \mathbf{N} \quad (4)$$

式(3)、(4)在形式上相近, 数值仿真中也便于分析与比较。同理, Oldham III 型和 IV 型分形链电路的运算性能分别用阻抗函数与导纳函数表征。4 种 Oldham 分形链的迭代方程罗列于表 1 之中。

1.2 连分式展开与阻纳函数的解析表示

根据 Oldham I 型分抗逼近电路的串并联结构特点, 在初始阻抗 $y_0(w)=1$ 时, 对于 k 节归一化原型电路, 输入阻抗函数序列的连分式表示为:

$$y_k(w) = 1 + \frac{1}{w + \frac{1}{1 + \frac{1}{w + \cdots \frac{1}{w + \frac{1}{1}}}}} = 1 + \overbrace{\frac{1}{w+1} \frac{1}{w} \frac{1}{w+1} \frac{1}{w} \frac{1}{w+1}}^{2k \text{项}}, \quad k \in \mathbf{N} \quad (5)$$

根据文献[4,13-15]中的连分式等价代换(Wall 恒等式), 可简化得到:

$$y_k(w) = \frac{1}{2} + \frac{t}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{t-1}{t+1}\right)^{2k+1}}{1 + \left(\frac{t-1}{t+1}\right)^{2k+1}}, \quad t = \sqrt{1 + \frac{4}{w}} \quad (6)$$

进一步可得:

$$y_k(w) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{4}{w}} \tanh \left[\left(k + \frac{1}{2} \right) \operatorname{acosh} \left(1 + \frac{w}{2} \right) \right] \xrightarrow{k \rightarrow \infty} y_{OI}(w) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{4}{w}} \quad (7)$$

式中 $y_{OI}(w)$ 是归一化 Oldham I 型分抗逼近电路的极限阻抗, 并有

$$\sqrt{\frac{1}{w}} \xleftarrow{0 \leftarrow |w|} y_{OI}(w) \xrightarrow{|w| \rightarrow \infty} 1 \quad (8)$$

由式(8)可知, Oldham I 型分形链电路在低频段具有半积分运算性能。Oldham 分形链类的阻纳函数解析表示罗列在表 1 之中。

表 1 Oldham 分形链分抗类电路的数学描述
Table 1 Mathematical description of Oldham fractal chain class circuits

type	iterating equations $y(w) = F(y(w))$	immittance functions $y_k(w), k \in \mathbf{N}^+$	transmission matrix	continued fractional three-term recursion matrix	notes
Type I (impedance)	$y(w) = 1 + \frac{1}{w + \frac{1}{y(w)}}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{4}{w}} \tanh \left[\left(k + \frac{1}{2} \right) \operatorname{arch} \xi \right]$	$\begin{bmatrix} 1 + \frac{w}{2} & 1 + \frac{w}{4} \\ w & 1 + \frac{w}{2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 + w & 1 \\ w & 1 \end{bmatrix}$	$y_0(w) = 1$
Type II (admittance)	$y(w) = 1 + \frac{1}{\frac{1}{w} + \frac{1}{y(w)}}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4w} \tanh \left[\left(k + \frac{1}{2} \right) \operatorname{arch} \zeta \right]$	$\begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{2w} & \frac{1}{w} \\ 1 + \frac{1}{4w} & 1 + \frac{1}{2w} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{w} \begin{bmatrix} 1 + w & 1 \\ w & w \end{bmatrix}$	$y_0(w) = 1$
Type III (impedance)	$y(w) = w + \frac{1}{1 + \frac{1}{y(w)}}$	$\frac{1}{w} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4w} \tanh \left[\left(k + \frac{1}{2} \right) \operatorname{arch} \zeta \right] \right\}$	$\begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{2w} & \frac{1}{w} + \frac{1}{4w^2} \\ 1 & 1 + \frac{1}{2w} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{w} \begin{bmatrix} 1 + w & w \\ 1 & w \end{bmatrix}$	$y_0(w) = \frac{1}{w}$
Type IV (admittance)	$y(w) = \frac{1}{w} + \frac{1}{1 + \frac{1}{y(w)}}$	$w \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{4}{w}} \tanh \left[\left(k + \frac{1}{2} \right) \operatorname{arch} \xi \right] \right\}$	$\begin{bmatrix} 1 + \frac{w}{2} & 1 \\ w + \frac{w^2}{4} & 1 + \frac{w}{2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 + w & w \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	$y_0(w) = \frac{1}{w}$
instructions	$w = \tau s$ $\tau = RC$	$\xi = 1 + \frac{w}{2}, \quad \zeta = 1 + \frac{1}{2w}$			initial impedance $y_0(w)$

1.3 传输参量矩阵与阻抗函数求解

Oldham I 型对称分形链电路(图 2(a))由 k 个相同的 T 型基本节(图 2(b))级联而成。根据传输参量矩阵理论, 可得 T 型双口网络的传输参量矩阵:

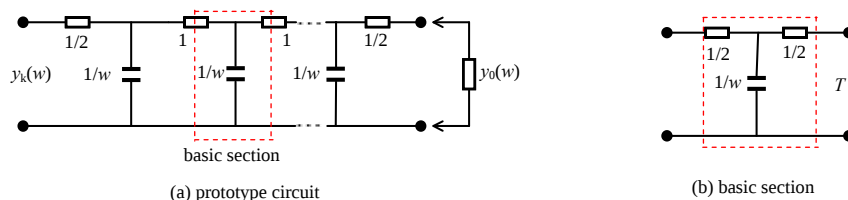


Fig.2 Symmetric Oldham I fractal chain circuit and the basic section
图 2 对称 Oldham I 型分形链电路及基本节

$$\tau = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{w}{2} & 1 + \frac{w}{4} \\ w & 1 + \frac{w}{2} \end{bmatrix} \quad (9)$$

式中 A, B, C, D 称为 T 型双口网络的传输参数。

令 $\theta = \operatorname{acosh} \left(1 + \frac{w}{2} \right)$, $u = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{4}{w}}$, 则对称 T 型双口网络的传输参量矩阵为:

$$\tau = \begin{bmatrix} \cosh(\theta) & u \sinh(\theta) \\ \frac{\sinh(\theta)}{u} & \cosh(\theta) \end{bmatrix} \quad (10)$$

有限 k 节对称 Oldham I 型分形链总的传输参量矩阵为:

$$T_k = \tau^k = \begin{bmatrix} A_k & B_k \\ C_k & D_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(k\theta) & u \sinh(k\theta) \\ \frac{\sinh(k\theta)}{u} & \cosh(k\theta) \end{bmatrix} \quad (11)$$

在输出端接入初始阻抗 $y_0(w) = \frac{b_0 + b_1 w}{a_0 + a_1 w}$, $0 \leq a_0, a_1, b_0, b_1 \leq \infty$ 时, 输入阻抗函数

$$y_k(w) = \frac{A_k(b_0 + b_1 w) + B_k(a_0 + a_1 w)}{C_k(b_0 + b_1 w) + D_k(a_0 + a_1 w)}, \quad k \in \mathbf{N} \quad (12)$$

显然, 输出端开路 ($a_0 = a_1 = 0$, $b_0 \neq 0$ 或 $b_1 \neq 0$)、短路 ($b_0 = b_1 = 0$, $a_0 \neq 0$ 或 $a_1 \neq 0$) 时的输入阻抗函数分别为:

$$\text{开路: } y_{ok}(w) = \frac{A_k}{C_k} = u \coth(k\theta) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{4}{w}} \quad (13)$$

$$\text{短路: } y_{sk}(w) = \frac{B_k}{D_k} = u \tanh(k\theta) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{4}{w}} \quad (14)$$

根据对称 Oldham II 型分形链电路(图 3(a))结构特点, 将每个内部电阻分成 2 个电阻并联的形式, 构造得出基本节如图 3(b)所示, 基本节之间相互级联。Oldham III 型、IV 型同理可构造出相应的对称电路及基本节。表 1 分别给出了 4 种 Oldham 分形链电路对称基本节的传输矩阵。

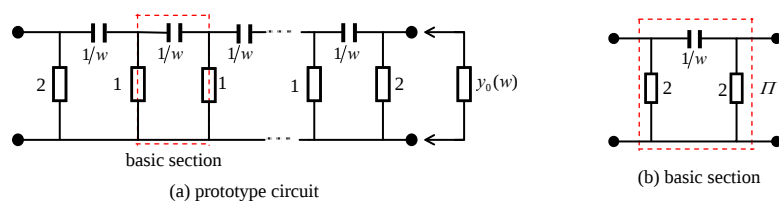


Fig.3 Symmetric Oldham II fractal chain circuit and the basic section

图3 对称 Oldham II 型分形链电路及基本节

1.4 连分式三项递推矩阵与阻抗函数求解

在数学上, 对于任意一个连分式^[13-14]

$$\frac{P_k}{Q_k} = b_0 + \mathbf{K} \left(\frac{a_i}{b_i} \right) = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \dots + \frac{a_k}{b_k}}} \quad (15)$$

若定义 $P_{-1}=1, Q_{-1}=0, P_0=b_0, Q_0=1$, 则有三项递推公式:

$$\begin{cases} P_k = b_k P_{k-1} + a_k P_{k-2} \\ Q_k = b_k Q_{k-1} + a_k Q_{k-2} \end{cases} \quad (16)$$

可写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} P_k \\ Q_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{k-1} & P_{k-2} \\ Q_{k-1} & Q_{k-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_k \\ a_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0 & P_{-1} \\ Q_0 & Q_{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & 1 \\ a_1 & 0 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} b_{k-1} & 1 \\ a_{k-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_k \\ a_k \end{bmatrix} \quad (17)$$

根据 Oldham I 型分抗逼近电路的连分式(式(5)), 对比式(17)可知 a_i, b_i 与电路元件有如下对应关系:

$$a_i = 1, \quad b_i = \begin{cases} 1, & i \text{ 为偶数} \\ w, & i \text{ 为奇数} \end{cases}, \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (18)$$

代入式(17), 由 $y_k(w) = \frac{n_k(w)}{d_k(w)} = \frac{P_{2k}(w)}{Q_{2k}(w)}$ 可得

$$\begin{bmatrix} n_k(w) \\ d_k(w) \end{bmatrix} = \mathbf{K}_k \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (19)$$

式中 $K_k = \kappa^k$, $\kappa = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+w & 1 \\ w & 1 \end{bmatrix}$ 。 κ 称为 Oldham I 型分形链分抗的连分式三项递推矩阵, 矩阵 κ 的行列式 $\det \kappa \neq 0$, κ 可以分解为 $\kappa = UAU^{-1}$ (A 为 κ 的特征值 λ 构成的对角矩阵, U 为 λ 对应的特征向量构成的矩阵, U^{-1} 为 U 的逆矩阵), 解出矩阵 κ 的特征方程 $\det(\kappa - \lambda E) = \lambda^2 - (w+2)\lambda + 1 = 0$ 的 2 个根 (E 是与 κ 维数相同的单位矩阵):

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}[(w+2) \pm w\sqrt{1+4/w}] \quad (20)$$

式中 λ_1 和 λ_2 互为倒数。令 $\lambda_1 = \lambda$, 有 $\lambda_2 = 1/\lambda$, $\lambda_{1,2}$ 分别对应特征向量:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_1 = [1, (-w + \sqrt{w^2 + 4w})/2] \\ \mathbf{u}_2 = [1, (-w - \sqrt{w^2 + 4w})/2] \end{cases} \quad (21)$$

由式(19)得 $w = (\lambda - 1)^2 / \lambda$, 代入式(21)得到简化的特征向量:

$$\mathbf{u}_1 = [1, (\lambda - 1)/\lambda], \quad \mathbf{u}_2 = [1, 1 - \lambda] \quad (22)$$

由此得到矩阵 U 和 A :

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{\lambda-1}{\lambda} & 1-\lambda \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{bmatrix} \quad (23)$$

进而得到

$$K_k = \kappa^k = U A^k U^{-1} = \frac{1}{(\lambda+1)\lambda^k} \begin{bmatrix} \lambda^{2k+1} + 1 & \lambda(\lambda^{2k} - 1)/(\lambda - 1) \\ (\lambda - 1)(\lambda^{2k} - 1) & \lambda^{2k} + \lambda \end{bmatrix} \quad (24)$$

将式(24)代入式(19), 可得输入阻抗函数

$$y_k(w) = \frac{1}{\lambda - 1} \times \frac{\lambda^{2k+2} - 1}{\lambda^{2k+1} + 1} \quad (25)$$

令 $\lambda = \frac{t+1}{t-1}$, 且 $t = \sqrt{1 + \frac{w}{4}}$, 代入式(25), 得

$$y_k(w) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{4}{w}} \tanh \left[\left(k + \frac{1}{2} \right) \operatorname{acosh} \left(1 + \frac{w}{2} \right) \right] \quad (26)$$

式(26)与式(7)在形式上完全一致, 即为 Oldham I 型分形链阻抗函数解析表达式。

1.5 运算特征与初始阻抗

分抗逼近电路的阻纳函数 $y_k(w)$ 在一定频率范围内近似理想分数阶算子 w^μ , 即

$$y(w) \approx w^\mu \quad (27)$$

令 $w = j \cdot 10^\sigma$, $\sigma \in \mathbf{R}$

$$y_k(j \cdot 10^\sigma) = (j \cdot 10^\sigma)^\mu = 10^{\mu\sigma} e^{j\pi\mu/2} \quad (28)$$

式中: σ 是频率指数变量; $j = \sqrt{-1}$ 。则阻抗函数 $y_k(j \cdot 10^\sigma)$ 在频域可分解为以下特征函数:

幅频特征函数:

$$A_k(\sigma) = \lg |y_k(j \cdot 10^\sigma)|, \quad \sigma \in \mathbf{R} \quad (29)$$

相频特征函数:

$$\theta_k(\sigma) = \arg \{y_k(j \cdot 10^\sigma)\}, \quad \sigma \in \mathbf{R} \quad (30)$$

阶频特征函数:

$$\mu_k(\sigma) = \frac{d|A_k(\sigma)|}{d\sigma}, \quad \sigma \in \mathbf{R} \quad (31)$$

运算特征由阶频特征 $\mu_k(\sigma)$ 与相频特征 $\theta_k(\sigma)$ 表征^[5]。

初始阻抗 $y_0(w)$ 及电路结构要求:

1) Oldham I 型、II 型分形链分抗初始阻抗 $y_0(w)=1$, Oldham III 型、IV 型分形链分抗初始阻抗 $y_0(w)=1/w$ 时, 可从连分式出发求得阻纳函数解析表达式。表 1 给出了 Oldham 分形链分抗 4 种情形的解析表达式。

2) 电路结构对称的双口网络, 这种情形采用传输矩阵的三角函数表示, 在任意初始阻抗能得到解析表达式。当输出端开路、短路时, 能得到双曲函数形式的解析表示。

3) 矩阵进行特征值分解得到的对角矩阵容易求出原矩阵的 k 次幂, 进而求得阻抗函数解析表示。标度迭代矩阵、连分式三项递推矩阵等可以进行特征值分解, 在给定任意初始阻抗条件下获得阻抗函数 $y_k(w)$ 的解析表达式。当输出端开路、短路、初始阻抗 $y_0(w)=1$ 时, 能得到双曲函数形式的解析表示。

图 4 是根据式(26), 在初始阻抗为 $y_0(w)=1$ 时, Oldham 分形链类电路的阶频特征曲线(实线表示阻纳函数随着迭代次数 k 变化的阶频特征曲线, 虚线表示 $\mu=\pm 1/2$ 的阶频特征曲线)。由图 3 可知, Oldham I 型和 III 型阻抗函数具有负半阶运算性能, Oldham II 型和 IV 导纳函数具有正半阶运算性能。

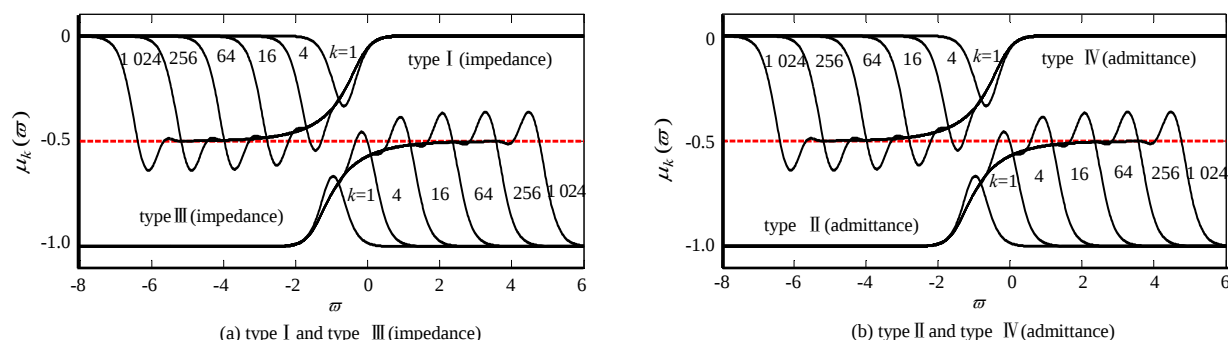


Fig.4 Order-frequency characteristics curves of Oldham fractal chain class circuits

图 4 Oldham 分形链类电路的阶频特征曲线

2 Liu-Kaplan 分形链类电路的阻纳函数求解

根据 Liu-Kaplan I 型分形链分抗归一化迭代电路(见图 5), 得到 Liu-Kaplan I 型分形链分抗归一化迭代方程——标度方程:

$$y(w) = 1 + \frac{1}{w + \frac{1}{\alpha y(\sigma w)}}, 1 < \alpha < \sigma = \alpha\beta \quad (32)$$

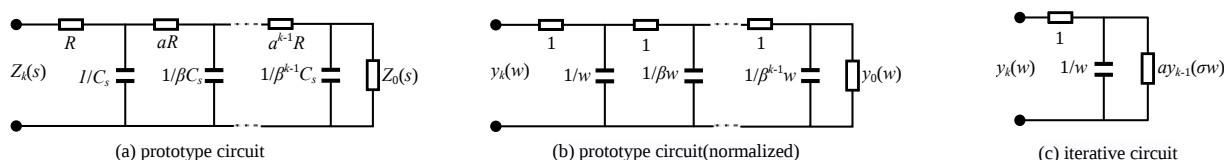


Fig.5 Fractance approximation circuit of Liu-Kaplan I fractal chain

图 5 Liu-Kaplan I 型分形链分抗逼近电路

2.1 标度迭代矩阵法

式(32)对应的 Liu-Kaplan I 型分形链分抗标度迭代公式为:

$$y_k(w) = 1 + \frac{\alpha y_{k-1}(\sigma w)}{1 + \alpha w y_{k-1}(\sigma w)} = \frac{D_{k-1}(\sigma w) + \alpha w N_{k-1}(\sigma w) + \alpha N_{k-1}(\sigma w)}{D_{k-1}(\sigma w) + \alpha w N_{k-1}(\sigma w)} = \frac{N_k(w)}{D_k(w)} \quad (33)$$

写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} N_k(w) \\ D_k(w) \end{bmatrix} = \Gamma_k \begin{bmatrix} N_0(\sigma^k w) \\ D_0(\sigma^k w) \end{bmatrix} = \prod_{i=0}^{k-1} \gamma_i \begin{bmatrix} N_0(\sigma^k w) \\ D_0(\sigma^k w) \end{bmatrix} \quad (34)$$

式中 $\Gamma_k = \prod_{i=0}^{k-1} \gamma_i$, $\gamma_i = \begin{bmatrix} \alpha \sigma^i w + \alpha & 1 \\ \alpha \sigma^i w & 1 \end{bmatrix}$ 。 γ_i 为 Liu-Kaplan I 型分形链分抗逼近电路的第 i 节标度迭代矩阵。

当给定初始阻抗 $Y_0(w)$ 时, $Y_0(w)$ 是否等于 $Y_0(\sigma^k w)$? 根据 Liu-Kaplan I 型分形链分抗迭代电路可知:

当 $k=1$ 时, 初始阻抗 $Y_0(w) = \alpha Y_0(\sigma w)$;

当 $k=2$ 时, 初始阻抗 $Y_0(w) = \alpha^2 Y_0(\sigma^2 w)$ 。

以此类推, k 阶电路的初始阻抗 $Y_0(w)=\alpha^k Y_0(\sigma^k w)$, 即 $Y_0(\sigma^k w)=Y_0(w)/\alpha^k$ 。表 2 给出 Liu-Kaplan 分形链分抗不同初始阻抗 $Y_0(w)$ 经过 k 次迭代的 $Y_0(\sigma^k w)$ 值。

表 2 k 次迭代的 $Y_0(\sigma^k w)$

initial impedance $Y_0(w)$	Table2 $Y_0(\sigma^k w)$ after iteration by k times			
	scaling iterative matrix method		continued fractional three-term recursive matrix method	
	$N_0(\sigma^k w)$	$D_0(\sigma^k w)$	$N_0(\sigma^k w)$	$D_0(\sigma^k w)$
resistance r_0	r_0	α^k	r_0	α^k
capacitance C_0	1	$\alpha^k C_0 w$	1	$\alpha^k C_0 w$
resistor series capacitor $r_0 \oplus C_0$	$1+r_0 C_0 w$	$\alpha^k C_0 w$	$1+r_0 C_0 w$	$\alpha^k C_0 w$
resistor parallels capacitor $r_0 // C_0$	r_0	$\alpha^k (1+r_0 C_0 w)$	r_0	$\alpha^k (1+r_0 C_0 w)$

2.2 连分式三项递推矩阵法

根据 Liu-Kaplan I 型分形链分抗电路模型或归一化迭代方程, 写出阻抗函数的连分式:

$$y_k(w)=1+\frac{\alpha}{\alpha w+1} \frac{1}{1+\frac{\alpha}{\alpha \sigma w+L}} \frac{\alpha}{\alpha \sigma^{k-1} w+y_0(\sigma^k w)}$$

(35)

由式(17)和式(35), 可得 Liu-Kaplan I 型分形链分抗的连分式三项递推矩阵

$$\begin{bmatrix} N_k(w) \\ D_k(w) \end{bmatrix} = \prod_k \begin{bmatrix} N_0(\sigma^k w) \\ D_0(\sigma^k w) \end{bmatrix} = \prod_{i=0}^{k-1} \gamma_i \begin{bmatrix} N_0(\sigma^k w) \\ D_0(\sigma^k w) \end{bmatrix}$$

(36)

式中: $\prod_k = \prod_{i=0}^{k-1} \gamma_i$, $\gamma_i = \begin{bmatrix} \alpha \sigma^i w + \alpha & 1 \\ \alpha \sigma^i w & 1 \end{bmatrix}$ 。式中 γ_i 称为 Liu-Kaplan I 型分形链分抗的第 i 节连分式三项递推矩阵。

连分式三项递推矩阵算法给定初始阻抗 $y_0(w)$, 经过 k 次迭代得到的 $y_0(\sigma^k w)$, 与标度迭代矩阵法的 $y_0(\sigma^k w)$ 相同(见表 2)。表 3 罗列了 Liu-Kaplan 分形链分抗类的标度方程(阻纳形式)及标度迭代矩阵、连分式三项递推矩阵。

表 3 Liu-Kaplan 分形链分抗类电路基本数学特点

Table3 Basic mathematical characteristics of Liu-Kaplan fractal chain class circuits

type	scaling expansion	scaling equation	scaling iterative matrix	continued fractional three-item recursive matrix	instructions
type I	positive proportion expansion	$y(w)=1+\frac{1}{w+\frac{1}{\alpha y(\sigma w)}}$	$\begin{bmatrix} \alpha \sigma^i w + \alpha & 1 \\ \alpha \sigma^i w & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \alpha \sigma^i w + \alpha & 1 \\ \alpha \sigma^i w & 1 \end{bmatrix}$	$1 < \alpha < \sigma = \alpha \beta$
type II	inverse proportion expansion	$\hat{y}(w)=1+\frac{1}{\frac{1}{w}+\frac{1}{\alpha \hat{y}(\frac{w}{\sigma})}}$	$\begin{bmatrix} \alpha w + \alpha \sigma^i & w \\ \alpha \sigma^i & w \end{bmatrix}$	$\frac{1}{w} \begin{bmatrix} \alpha w + \alpha \sigma^i & w \\ \alpha \sigma^i & w \end{bmatrix}$	$0 < \frac{1}{\sigma} < \frac{1}{\alpha} < 1$
type III	inverse proportion expansion	$y(w)=\frac{1}{w}+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{1}{\alpha y(\frac{w}{\sigma})}}}$	$\begin{bmatrix} \sigma^i + w & \alpha \sigma^i \\ w & \alpha w \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\alpha w} \begin{bmatrix} \sigma^i + w & \alpha \sigma^i \\ w & \alpha w \end{bmatrix}$	$y_k(w)$
type IV	positive proportion expansion	$\hat{y}(w)=w+\frac{1}{1+\alpha \frac{1}{\hat{y}(\sigma w)}}$	$\begin{bmatrix} 1 + \sigma^i w & \alpha \sigma^i w \\ 1 & \alpha \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\alpha} \begin{bmatrix} 1 + \sigma^i w & \alpha \sigma^i w \\ 1 & \alpha \end{bmatrix}$	$\hat{y}_k(w)$
notes	normalized arithmetic variable: $w = RCs = \tau s$ $w = RCs = \tau s$ α : resistive progressive ratio β : capacitive progressive ratio $\sigma = \alpha \beta$: scale factor			i denotes the i th iteration	

3 结论

本文从不同角度推导出 Oldham 及标度 Liu-Kaplan 分形链分抗类电路阻纳函数的不同算法, 数值仿真验证了 Oldham 与 Liu-Kaplan 分形链类电路的分数阶运算性能。Oldham 分形链类的阻抗函数均具有 $-1/2$ 阶分数阶运算性能, Liu-Kaplan 分形链类电路能够获得任意分数阶运算性能($\mu_{\text{Liu}} = -\lg \alpha / \lg \sigma$, 称之为 Liu 氏阶)。文中使用的连分式递推矩阵算法从连分式和代数运算角度出发, 经过连分式三项递推公式得到矩阵算法, 与归一化迭代矩阵公式有细微差别, 但在数值仿真及分析中没有差别。Liu-Kaplan 分析链类电路有多种数值求解方法, 但是解析解该如何推导将是接下来工作研究的重点。

参考文献:

- [1] GRENNES M, OLDHAM K B. Semi-integral electro-analysis: theory and verification[J]. Analytical Chemistry, 1972, 44(7): 1121-1129.
- [2] GOTO M, OLDHAM K B. Semi-integral electro-analysis: shapes of neopolarograms[J]. Analytical Chemistry, 1973, 45(12): 2043-2050.
- [3] OLDHAM K B. Semi-integral electro-analysis: analog implementation[J]. Analytical Chemistry, 1973, 45(1): 39-47.
- [4] OLDHAM K B, SPANIER J. The fractional calculus: theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order[M]. New York: Academic Press, 1974.
- [5] 袁晓. 分抗逼近电路之数学原理[M]. 北京: 科学出版社, 2015. (YUAN Xiao. Mathematical principles of fractance approximation circuits[M]. Beijing: Science Press, 2015.)
- [6] 袁晓, 冯国英. Oldham 分形链分抗类与新型 Liu-Kaplan 标度方程[C]// 中国电子学会电路与系统分会第二十六届学术年会. 长沙, 湖南: [s.n.], 2015: 295-300. (YUAN Xiao, FENG Guoying. Oldham fractal chain class and new Liu-Kaplan scale equation[C]// The Symposium of the 26th Academic Annual Meeting of the Circuit and System Branch of the Chinese Institute of Electronics. Changsha, Hunan, China: [s.n.], 2015: 295-300.)
- [7] 袁晓, 冯国英. 粗糙界面电极的电路建模与 Liu-Kaplan 标度方程[C]// 中国电子学会电路与系统分会第二十六届学术年会. 长沙, 湖南: [s.n.], 2015: 140-148. (YUAN Xiao, FENG Guoying. Circuit modeling of rough interface electrodes and Liu-Kaplan scaling equation[C]// The Symposium of the 26th Academic Annual Meeting of the Circuit and System Branch of the Chinese Institute of Electronics. Changsha, Hunan, China: [s.n.], 2015: 140-148.)
- [8] 袁子, 袁晓. 规则 RC 分形分抗逼近电路的零极点分布[J]. 电子学报, 2017, 45(10): 2511-2520. (YUAN Zi, YUAN Xiao. Zero-pole distribution of regular RC fractal fractance approximation circuit[J]. Chinese Journal of Electronics, 2017, 45(10): 2511-2520.)
- [9] 易舟, 袁晓. 分形分抗逼近电路零极点的数值求解与验证[J]. 太赫兹科学与电子信息学报, 2017, 15(1): 98-103. (YI Zhou, YUAN Xiao. The numerical solution and verification of zero-pole for some fractal fractance approximation circuits[J]. Journal of Terahertz Science and Electronic Information Technology, 2017, 15(1): 98-103.)
- [10] LIU S H. Fractal model for the ac response of rough interface[J]. Physical Review Letters, 1985, 55(5): 529-532.
- [11] KAPLAN T, GRAY L J. Effect of disorder on a fractal model for the ac response of a rough interface[J]. Physical Review Letters, 1985, 55(5): 529-532.
- [12] KAPLAN T, GRAY L J, LIU S H. Self-affine fractal model for a metal-electrolyte interface[J]. Physical Review Letters, 1987, 58(10): 5379-5381.
- [13] JONES W B, THRON W J, BROWDER F E, et al. Continued fractions: analytic theory and applications[M]. Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, 1980.
- [14] 檀结庆. 连分式理论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2007. (TAN Jieqing. Fractional theory and its applications[M]. Beijing: Science Press, 2007.)
- [15] 数学手册编写组. 数学手册[M]. 北京: 人民教育出版社, 1979. (Editing group of mathematics manual. Math manual[M]. Beijing: People's Education Press, 1979.)

作者简介:



高小龙(1992-), 男, 陕西省榆林市人, 在读硕士研究生, 主要研究方向为分抗逼近电路阻纳函数. email: scuxl91@163.com.

袁晓(1964-), 男, 四川省中江县人, 博士, 副教授, 主要研究方向为现代信息信号处理, 分数微积分理论与应用、现代电路与系统理论与技术等.

施卜椿(1993-), 男, 江苏省启东市人, 在读硕士研究生, 主要研究方向为分抗逼近电路零极点分布等.