

文章编号: 2095-4980(2019)04-0583-06

## 逆伽马纹理复合高斯杂波参数的贝叶斯估计方法

许述文, 王 乐, 曾威良, 水鹏朗

(西安电子科技大学 雷达信号处理国家重点实验室, 陕西 西安 710071)

**摘 要:** 复合高斯杂波(CGC)在拟合高分辨力、低掠射角海杂波中已得到广泛应用, 带有逆伽马纹理的 CGC 的强度分布为广义帕累托(GP)分布。在实际雷达工作场景中, 由于观测区域内海杂波的非平稳非均匀特性, 导致独立同分布杂波样本的获取十分困难。提出一种广义帕累托分布参数的贝叶斯估计方法, 通过在线更新数据的先验信息, 获取小样本情形下 GP 分布参数。仿真实验证明, 该方法能够在样本数量较小的情况下, 对 GP 数据实现较为精确的参数估计。

**关键词:** 海杂波; 帕累托分布; 参数估计; 贝叶斯

中图分类号: TN914.42

文献标志码: A

doi: 10.11805/TKYDA201904.0583

## Bayesian estimation method for Compound Gaussian Clutter model with inverse Gamma texture

XU Shuwen, WANG Le, ZENG Weiliang, SHUI Penglang

(National Key Laboratory of Radar Signal Processing, Xidian University, Xi'an Shaanxi 710071, China)

**Abstract:** Compound Gaussian Clutter(CGC) model has been widely used in fitting sea clutter with high resolution and low grazing angle. The intensity distribution of CGC with inverse Gamma texture is Generalized Pareto(GP) distribution. In real radar environment, it is very difficult to obtain large-size independent and identically distributed clutter samples due to the non-stationary and non-uniform characteristics of sea surface. Therefore, a Bayesian estimation method for parameters of GP distribution is proposed. The parameters of GP distribution with small sample are obtained by updating the prior knowledge of data online. Simulation results show that the proposed method can achieve more accurate parameter estimation compared with the conventional methods when the prior knowledge is reliable.

**Keywords:** sea clutter; Pareto distribution; parameter estimation; Bayes

在雷达目标检测过程中, 海面场景的感知是实现雷达目标恒虚警检测(Constant False-Alarm Rate, CFAR)的重要组成部分<sup>[1]</sup>。复合高斯杂波(CGC)模型已广泛用于高分辨力、低掠射角杂波的建模与仿真中, 该模型的应用过程包含 2 个步骤, 其一为纹理分布的选择, 其二为分布参数的估计。常用的纹理分布主要包括伽马分布、逆伽马分布以及逆高斯分布, 这 3 种纹理分别对应 K 分布模型<sup>[2]</sup>、广义帕累托(GP)分布模型<sup>[3-4]</sup>以及逆高斯纹理复合高斯(Inverse Gaussian-Compound Gaussian, IG-CG)模型<sup>[5-6]</sup>。基于实测数据的分析显示, 在雷达分辨率很高或杂波拖尾严重的情况下, GP 模型对于数据的拟合程度更好<sup>[3-4]</sup>。另外, 已有学者给出基于以上 3 种模型的最优检测器<sup>[7-10]</sup>, 其中, GP 模型下的最优检测器<sup>[10-11]</sup>是 3 种模型中唯一计算可实现的方案。

在上述最优检测器的应用过程中, 主要需要解决 2 个问题, 第一是分布模型的选择, 第二是模型参数的估计。本文主要针对 GP 模型的分布参数估计方法进行探究。类似于 K 分布以及 IG-CG 分布, GP 分布的参数估计通过矩估计或最大似然估计实现<sup>[4]</sup>。而传统估计方法的估计精确度受到样本数量的限制。在实际工程应用中, 通过以下 2 种方法来采集容量较大的数据样本: 如对于地杂波, 其在时间上具有平稳性, 因此可以通过长时间观测来采集大容量样本用作参数估计; 对于气象杂波, 其时间上的非平稳性可以通过其在空间上一定尺度内的均匀性加以弥补, 因此数据可以通过大尺度观测进行收集。而对于海面背景下的目标检测, 由于海平面的运动特性, 海杂波在空时二维上往往都具有非平稳性, 因此造成了独立同分布样本的获取十分困难, 这称为本性小样本问题。对于

收稿日期: 2017-12-26; 修回日期: 2018-03-08

基金项目: 陕西省自然科学基金面上项目资助项目(2017JM6031); 陕西省科协人才托举计划资助项目(20160205)

复合高斯分布, 这种样本数量下的数据往往难以给出比较精确的参数估计结果, 这将对后续雷达目标检测过程造成影响。如果可以预先得知海面场景的先验信息, 就可以利用贝叶斯理论将这一部分信息结合到海面场景的感知中, 进而提高参数估计的精确度, 提升目标检测的性能。因此本文提出一种利用历史数据所提供的先验信息的贝叶斯参数估计方法, 通过最大化数据的后验概率密度获得参数的估计值。

## 1 GP 分布模型及其传统参数估计方法

### 1.1 GP 分布模型

复合高斯模型将杂波  $c$  建模为 2 个独立分布的随机过程的乘积<sup>[9]</sup>:

$$c = \sqrt{\tau}u \quad (1)$$

式中:  $u$  为一个零均值单位方差的复高斯随机变量, 称为散斑分量;  $\tau$  为一个非负的随机过程, 称为纹理分量。

GP 分布模型的纹理服从逆伽马分布<sup>[4]</sup>, 其概率密度函数定义为:

$$f_{\tau}(\tau; \alpha, \beta) = \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} \tau^{-(\alpha+1)} e^{-1/\beta\tau} \quad (2)$$

可以推导出杂波的幅度概率密度函数为<sup>[4]</sup>:

$$p_A(x) = \frac{2x\alpha\beta}{(1+\beta x^2)^{(\alpha+1)}} \quad (3)$$

进而可以推导出其强度概率密度函数为:

$$p_I(x) = \frac{\alpha\beta}{(1+\beta x)^{(\alpha+1)}} \quad (4)$$

式中:  $\alpha$  为形状参数;  $\beta$  为尺度参数。形状参数主要影响杂波的拖尾程度, 形状参数越小, 杂波拖尾越重。尺度参数则主要影响杂波的功率水平。

### 1.2 GP 分布的传统参数估计方法

#### 1.2.1 矩估计方法

GP 分布的  $n$  阶矩可以表示为<sup>[12]</sup>:

$$E(X^n) = \frac{\alpha\Gamma(\alpha-n)\Gamma(n+1)}{\beta^n\Gamma(\alpha+1)} \quad (5)$$

但该样本矩只在  $\alpha > n$  时存在。如果选择一、二阶矩进行参数估计, 则参数估计的表达式可以写成:

$$\begin{cases} \hat{\alpha} = \frac{2D(X)}{D(X) - E^2(X)} \\ \hat{\beta} = \frac{1}{E(X)(\hat{\alpha} - 1)} \end{cases} \quad (6)$$

式中  $E(X)$  和  $D(X)$  分别代表样本的期望和方差。当  $\alpha$  取值较小时, 式(6)提供的参数估计方法可能难以给出可靠的估计结果。因此可以针对取值较小的  $\alpha$  使用所谓的分数阶矩估计的参数估计方法, 即使用非整数的样本矩对参数进行估计。本文使用 0.5 阶和 0.25 阶样本矩<sup>[4]</sup>对参数进行估计(Method of Fractional Moments, MoFM):

$$\begin{cases} E(\hat{R}^{0.5}) = (1/\beta)^{0.5} \frac{\Gamma(1.5)\Gamma(\alpha-0.5)}{\Gamma(\alpha)} \\ E(\hat{R}^{0.25}) = (1/\beta)^{0.25} \frac{\Gamma(1.25)\Gamma(\alpha-0.25)}{\Gamma(\alpha)} \end{cases} \quad (7)$$

当  $\alpha > 0.5$  时, 可以使用任意一种一维零点搜索方法获取参数的估计值。

#### 1.2.2 最大似然估计方法

尽管矩估计能够在很短的时间代价下给出参数的估计结果, 但由于其收敛范围和估计精确度的限制, 通常使用最大似然(Maximum Likelihood, ML)估计来获取参数较为精确的估计结果。 $N$  个独立同分布的 GP 分布样本的联合概率密度函数可以表示为:

$$f_x(x; \alpha, \beta) = (2\alpha\beta)^N \prod_{i=1}^N \frac{1}{(\beta x_i + 1)^{\alpha+1}} \quad (8)$$

计算其对数形式, 可以得到对数似然函数为:

$$\ell = \ln f_x(x; \alpha, \beta) = N \ln(2\alpha\beta) - \sum_{i=1}^N (\alpha + 1) \ln(\beta x_i + 1) + \text{const} \quad (9)$$

对其参数  $\alpha$  和  $\beta$  分别求偏导, 并令其等于 0, 可以得到以下非线性方程组<sup>[3]</sup>:

$$\begin{cases} \frac{\partial \ell}{\partial \alpha} = \frac{N}{\alpha} - \sum_{i=1}^N \ln(\beta x_i + 1) = 0 \\ \frac{\partial \ell}{\partial \beta} = \frac{N}{\beta} - (\alpha + 1) \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\beta x_i + 1} = 0 \end{cases} \quad (10)$$

求解该二元非线性方程的零点, 可以获取样本参数的最大似然估计值。

## 2 贝叶斯参数估计方法

贝叶斯统计推断的基本流程可以表述为<sup>[13-14]</sup>: 后验分布是对于当前样本信息和先验信息的一个折中, 而折中程度则随着样本数量的增加而下降。根据贝叶斯公式, 形状参数  $\alpha$  的后验概率密度函数可表示为:

$$\pi(\alpha | \mathbf{x}) = \frac{f(\mathbf{x} | \alpha) \pi(\alpha)}{\int_{\Theta} f(\mathbf{x} | \alpha) \pi(\alpha) d\alpha} \quad (11)$$

式中:  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  为获得的独立同分布样本;  $\pi(\alpha)$  为参数的先验分布;  $\Theta$  为参数的取值空间;  $f(\mathbf{x} | \alpha)$  为样本的联合概率密度函数。

### 2.1 先验分布的获取

本文所讨论的关键问题至此变成了如何寻找合适的先验分布对数据进行拟合。在实际情况中, 由于战场环境、海况、海态和温度等多种因素的共同作用, 往往难以选择一个通用的模型对数据甚至数据参数的先验分布做精确的匹配。因此, 本文采取的方案是: 首先将雷达设为全扫描模式, 在跟踪目标或正式进入检测状态之前, 对该雷达所处的环境数据进行采集; 然后对该战场环境下的参数做粗略估计, 根据大场景和相对较长的观测时间下的数据, 得到数据形状参数先验分布的经验概率密度函数, 并对其进行分析建模, 将建模后的结果用于后续作战状态下的参数估计。由于模型建立在大场景和长时观测条件下, 因此模型可以包含空时二维信息, 并且先验分布的数据通过在线采集和更新过程完成, 具有足够的匹配精确程度。实际处理过程中, 由于受到数据采集分析时间的限制, 可以选择几种固定的模型, 通过前期数据采集过程, 将模型固定, 而在线更新数据时, 只对先验分布模型的参数进行更新。先验分布的模型可以通过模型参数分布的经验概率密度函数和该模型之间的柯尔莫可洛夫-斯米洛夫(Kolmogorov-Smirnov, KS)距离进行选择, 仅当作战场景或海面状态发生剧烈变化时, 才对模型进行重新选择。KS 距离的定义为:

$$D_{KS} = \max [p(x_i) - c(x_i)] \quad (12)$$

式中:  $p(x_i)$  为样本在  $x_i$  的累计概率;  $c(x_i)$  为待匹配模型的累积分布函数。在处理大量实际数据中发现, 正态分布、伽马分布、逆高斯分布、布尔分布等分布模型可以对不同数据集下的形状参数分布进行拟合。因此在实际处理中, 可以将上述几种模型作为备选模型, 通过比较 KS 距离获取最优的参数先验分布。

当杂波样本功率归一化时, GP 分布的形状参数和尺度参数有对应关系, 即  $\alpha\beta=1$ 。为了降低计算复杂程度, 避免对 2 个参数的先验分布进行拟合, 在杂波样本功率归一化的前提下对数据的形状参数先验分布进行拟合。

本文分析的实验数据来自 CSIR 开放数据库于 2006 年 7 月在南非西海岸采集的高分辨率雷达回波数据, 该实验雷达的距离分辨力为 15 m, 脉冲重复频率 5 000 Hz<sup>[15]</sup>。数据分析流程为: 首先对原始数据按照一定的窗口大小进行分组, 然后对窗口内的数据利用最大似然方法估计形状参数, 接着统计不同数据集下形状参数的分布结果, 利用不同的模型对其进行拟合, 通过比较 KS 距离选定模型后估计其模型参数。图 1 给出收集的 19 个数据集下不同模型对于广义帕累托分布形状参数分布拟合的 KS 距离。实验发现, 对于南非数据集的统计数据, 伽马分布具有更好的拟合效果。因此在后续仿真实验中, 选择伽马分布作为形状参数分布的先验概率密度分布。

2.2 后验众数估计

可以通过以下 3 种方法来获取参数的后验估计结果：

$$\hat{\theta}_{MD} = \max_{\theta} \pi(\theta | \mathbf{x}) \quad (13)$$

$$\hat{\theta}_E = \text{mean} \pi(\theta | \mathbf{x}) \quad (14)$$

$$\hat{\theta}_{ME} = \text{median} \pi(\theta | \mathbf{x}) \quad (15)$$

式(13)~(15)分别称为参数的后验众数估计、后验均值估计以及后验中位数估计。由于式(16)的解析形式并不容易计算，需要通过蒙特卡洛积分寻求其数值解。

$$f(x) = \int_{\Theta} f(\mathbf{x} | \alpha) \pi(\alpha) d\alpha \quad (16)$$

因此选择后验众数估计来求得参数的贝叶斯估计值。

可以推导出：

$$\pi(\alpha | \mathbf{x}) \propto f(\mathbf{x} | \alpha) \pi(\alpha) \quad (17)$$

最终给出的参数估计表达式为：

$$\hat{\alpha}_{MD} = \max_{\alpha} f(\alpha | \mathbf{x}) \pi(\alpha) \quad (18)$$

3 方法对比结果

3.1 仿真数据说明

利用复合高斯模型生成仿真数据。首先按照设定的先验分布，生成一组形状参数  $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N]$ ；然后利用该形状参数生成对应的帕累托分布杂波数据  $\mathbf{X}_i = [x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{iM}]$ ，再利用不同的参数估计方法对每组数据的形状参数进行估计；最后使用均方根误差(Root Mean Square Error, RMSE)作为指标，对不同方法的估计性能进行比较。相对均方根误差计算公式为：

$$RMSE(\alpha) = \sqrt{E[(\hat{\alpha}_i - \alpha_i)^2]} \quad (19)$$

$$RMSE(\beta) = \sqrt{E[(\hat{\beta}_i - \beta_i)^2]} \quad (20)$$

试验中，先验分布为伽马分布，参数值为 (0.02,50) (南非数据拟合结果的平均值)，形状参数生成数量  $N = 10^4$ ，样本数量在  $[10^{1.5}, 10^3]$  之间变化。

3.2 实验结果

图 2 和图 3 分别为上述仿真实验条件下，不同方法对于形状参数  $\alpha$  和尺度参数  $\beta$  估计的相对 RMSE 随样本数量的变化曲线。可以看出，在先验分布模型较为准确的前提下，本文所提的贝叶斯参数估计方法效果优于传统的参数估计。

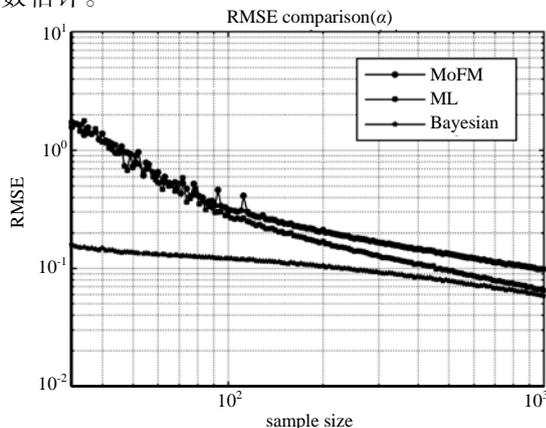


Fig.2 Relative RMSE of shape parameters by different estimation methods

图 2 不同估计方法对于形状参数的均方根误差

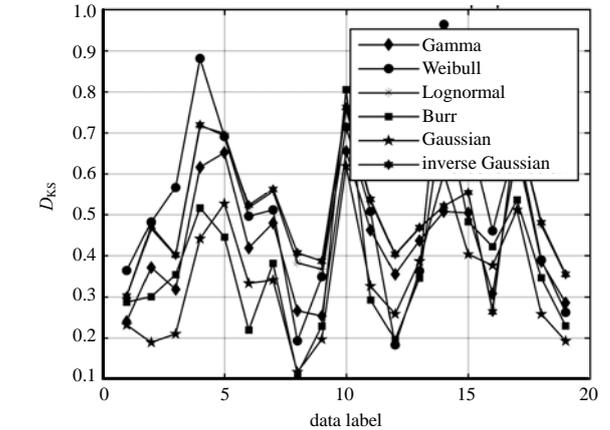


Fig.1 KS distance of different models to fit the shape parameter distribution under CSIR dataset

图 1 不同分布对于 CSIR 数据形状参数分布拟合的 KS 距离

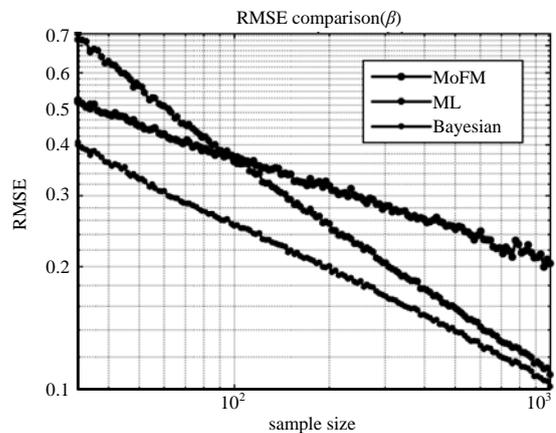


Fig.3 Relative RMSE of scale parameters by different estimation methods

图 3 不同估计方法对于尺度参数的均方根误差

前文是在理想条件下的试验结果，但在实际雷达数据采集过程中，由于场景环境因素可能在数据采集的过程中发生变化，并且使用离线数据所估计的形状参数可能存在偏差，因此先验分布可能并不是完全准确可靠的，以下给出试验分析。

在实际数据的处理中可能发生以下 2 种情况：一是先验分布的参数估计过程可能存在偏差；二是先验分布参数估计的模型可能存在失配。图 4 和图 5 为在先验分布形状参数估计误差分别为 2%,5%,10%,20%以及 50%的情况下，贝叶斯估计方法的估计精确度随样本数量的变化曲线。从图中可以看出，贝叶斯估计方法的估计精确度对于先验分布的准确程度确实具有依赖性，但同时，当先验分布的估计误差在一定范围内时，该方法具有鲁棒性。

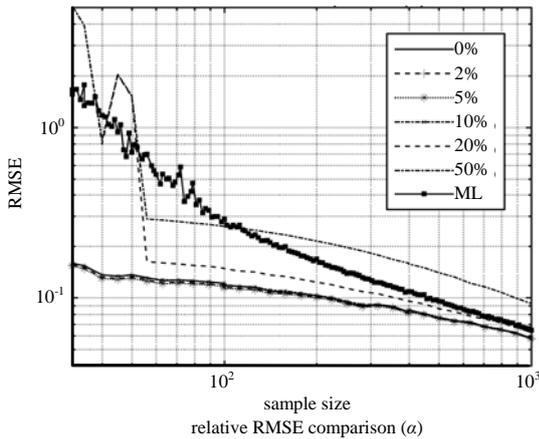


Fig.4 Relative RMSE of shape parameters by Bayesian estimators under different prior distribution biases  
图 4 先验分布误差在不同取值下，贝叶斯方法对于形状参数的均方根误差

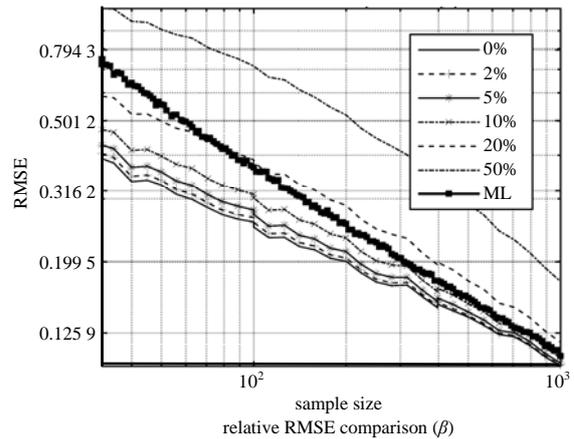


Fig.5 Relative RMSE of scale parameters by Bayesian estimators under different prior distribution biases  
图 5 先验分布误差在不同取值下，贝叶斯方法对于尺度参数的均方根误差

从实验结果可以看出，在先验分布的误差小于 20%的情况下，该方法仍明显优于最大似然估计。在实际雷达数据采集的过程中，由于历史数据可以在很大的空时二维空间条件下采集，因此其先验分布的样本数量本身较大，估计误差可以控制在合理的范围内。因此，可以认为该方法在此条件下可以正常工作。

除了前文所讨论过的模型参数估计误差的情况之外，在实际数据的处理过程中，还可能发生先验模型失配的情况。图 6 和图 7 为在先验分布模型为伽马分布的条件下，选择高斯模型、逆高斯模型、威布尔分布模型、布尔分布模型作为数据先验分布时，贝叶斯方法的估计误差曲线。先验分布模型失配对贝叶斯方法的估计精确度具有一定的影响，但可以认为，不同分布模型在不同参数取值的情况下，其概率密度函数的形状具有一定的相似性。因此，在历史数据量较大的情况下，可以获得大量的先验分布参数。即使是失配的先验分布模型，仍能对形状参数先验分布的数据进行较好的描述。并且，在实际数据处理的过程中，模型失配发生的情况并不常见。据此可以得出，该方法对于形状参数的分布模型失配的情况具有一定的鲁棒性。

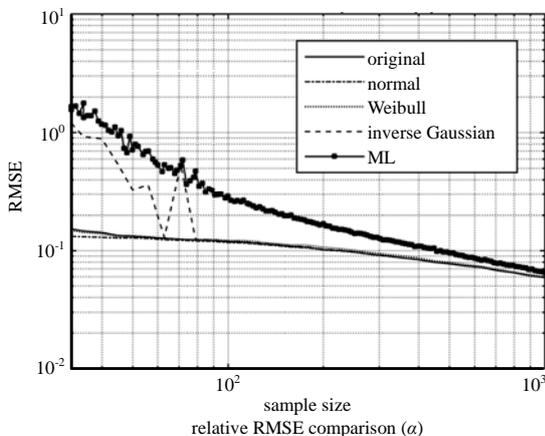


Fig.6 Relative RMSE of shape parameters by Bayesian estimators when the prior distribution is mis-matched  
图 6 先验分布模型失配的情况下，贝叶斯方法对于形状参数的均方根误差

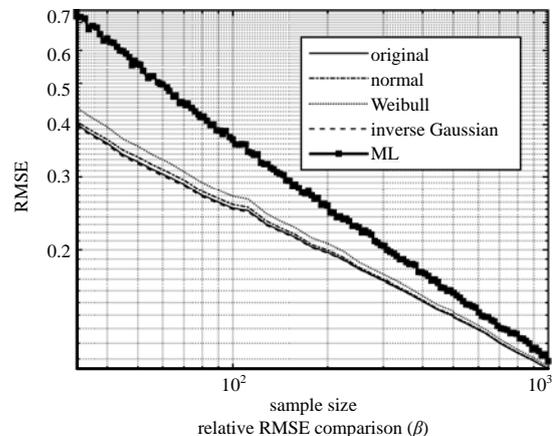


Fig.7 Relative RMSE of scale parameters by Bayesian estimators when the prior distribution is mis-matched  
图 7 先验分布模型失配的情况下，贝叶斯方法对于尺度参数的均方根误差

## 4 结论

在实际数据处理中,由于海杂波背景的非均匀非平稳性,造成其独立同分布的样本获取十分困难,本文提出一种基于贝叶斯理论的广义帕累托分布参数估计方法,通过在线更新先验信息,获取分布参数的后验众数估计。仿真实验证明,在先验分布获取较为准确的情况下,本文所提的参数估计方法的估计误差低于传统估计方法,可用于后续海杂波背景下雷达目标的检测。

### 参考文献:

- [1] 秦文利,郑娜娥,顾帅楠. MIMO 雷达弱目标检测前跟踪算法[J]. 太赫兹科学与电子信息学报, 2017,15(4):595-600. (QIN Wenli,ZHENG Na'e,GU Shuainan. A weak target Tracking Before Detecting algorithm for MIMO radar[J]. Journal of Terahertz Science and Electronic Information Technology, 2017,15(4):595-600.) DOI:10.11805/TKYDA201704.0595.
- [2] WARD K,TOUGH R,WATTS S,et al. Sea clutter:scattering,the K-distribution and radar performance[J]. Waves in Random & Complex Media, 2013,17(2):233-234.
- [3] SHUI P L,YU H,SHI L X,et al. Explicit bipercentile parameter estimation of compound-Gaussian clutter with inverse gamma distributed texture[J]. IET Radar,Sonar & Navigation, 2018,12(2):202-208.
- [4] BALLERI A,NEHORAI A,WANG J. Maximum likelihood estimation for compound-Gaussian clutter with inverse gamma texture[J]. IEEE Transactions on Aerospace & Electronic Systems, 2007,43(2):775-779.
- [5] OLLILA E,TYLER D E,KOIVUNEN V,et al. Compound-Gaussian clutter modeling with an inverse Gaussian texture distribution[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2012,19(12):876-879.
- [6] SHUI P L,SHI L X,YU H,et al. Iterative maximum likelihood and outlier-robust bipercentile estimation of parameters of compound-Gaussian clutter with inverse Gaussian texture[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2016,23(11):1572-1576.
- [7] SANGSTON K J,GINI F,GRECO M S. Coherent radar target detection in heavy-tailed compound-Gaussian clutter[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2012,48(1):64-77.
- [8] SANGSTON K J,GINI F,GRECO M V,et al. Structures for radar detection in compound Gaussian clutter[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1999,35(2):445-458.
- [9] SHUI P L,LIU M,XU S W. Shape-parameter-dependent coherent radar target detection in K-distributed clutter[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2016,52(1):451-465.
- [10] SHUI P L,LIU M. Subband adaptive GLRT-LTD for weak moving targets in sea clutter[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2016,52(1):423-437.
- [11] GINI F,GRECO M. Texture modelling,estimation and validation using measured sea clutter data[J]. IEEE Proceedings-Radar,Sonar and Navigation, 2002,149(3):115-124.
- [12] SHARPE N R. Statistics for management and economics[J]. American Statistician, 1993,55(4):370-371.
- [13] GELMAN A B,CARLIN J B,STERN H S,et al. Bayesian data analysis[J]. Journal of the American Statistical Association, 2003,45(2):86-91.
- [14] JAY E,OVARLEZ J P,DECLERCQ D,et al. BORD:Bayesian optimum radar detector[J]. Signal Processing, 2003,83(6):1151-1162.
- [15] HERSELMAN P L,BAKER C J,DE WIND H J. An analysis of X-band calibrated sea clutter and small boat reflectivity at medium-to-low grazing angles[J]. International Journal of Navigation & Observation, 2008(2):14.

### 作者简介:



许述文(1985-),男,安徽省歙县人,副教授,主要研究方向为雷达目标检测、时频分析、SAR 图像处理.email:swxu@mail.xidian.edu.cn.

王乐(1994-),男,内蒙古自治区包头市人,在读硕士研究生,主要研究方向为雷达目标检测以及参数估计.

曾威良(1993-),男,广东省惠州市人,在读硕士研究生,主要研究方向为雷达目标检测与特征学习.

水鹏朗(1967-),男,陕西省蓝田县人,教授,主要研究方向为雷达目标检测、图像特征检测、图像分割.