

文章编号: 2095-4980(2020)01-0082-08

基于方位的无源相干定位中加权矩阵求解方法

赵 闯, 赵拥军, 骆丽萍

(解放军战略支援部队信息工程大学 数据与目标工程学院, 河南 郑州 450000)

摘 要: 针对多基地无源雷达中对单目标的定位问题, 提出一种利用角度信息的加权最小二乘定位算法。设计了基于角度的目标定位模型, 并根据不同的角度测量噪声设计了加权矩阵, 进行了误差分析并推导了算法的 Cramer-Rao 界。仿真分析表明, 本文算法优于同类算法, 并且以 3 个接收站与一个外辐射源为例, 给出了最佳位置配置建议。

关键词: 多基地无源雷达系统; 角度信息; 误差分析

中图分类号: TN958.97

文献标志码: A

doi: 10.11805/TKYDA2018196

Weighted least squares method for solving passive coherent location based on bearing

ZHAO Chuang, ZHAO Yongjun, LUO Liping

(Institute of Data and Target Engineering, Information Engineering University, Zhengzhou Henan 450000, China)

Abstract: To solve the problem of single target localization in multistatic passive radar, a weighted least square localization algorithm based on angle information is proposed. The target location model based on angle is designed, and the weighting matrix is designed according to different angle measurement noises. Then the error analysis is carried out and the Cramer-Rao bound of the algorithm is derived. The simulation results show that the proposed algorithm is superior to the same class algorithm, and the optimal location configuration is given by taking three receiving stations and one emitter.

Keywords: multistatic passive radar system; angle information; error analysis

无源雷达自身不发射信号, 利用外辐射源探测目标。由于其隐蔽探测, 造价不高, 特别是具有反隐身的潜质, 近年来受到诸多学者关注。根据外辐射源和接收站数目的不同, 无源雷达可分为双基地无源雷达和多基地无源雷达。双基地无源雷达系统一般由一个外辐射源和一个接收站组成^[1]。多基地无源雷达系统由多个外辐射源与一个接收站、一个外辐射源与多个接收站或多外辐射源与多接收站构成^[2]。一个外辐射源、目标和一个接收站可以构成一个“探测对”, 即构成解算目标位置的探测方程。不同的无源雷达系统各有优缺点^[3], 同样适用于不同的应用场景。本文研究对象为多外辐射源和多接收站的多基地无源雷达。由于多基地被动雷达测量的参数不同, 定位的方法也不尽相同。常见的测量参数包括: 信号能量(Received Signal Strength, RSS)^[4]、到达角(Direction Of Arrival, DOA)^[5-6]、到达频率差(Frequency Difference Of Arrival, FDOA)和到达时间差(Time Difference Of Arrival, TDOA)^[7-8]。根据参数测量的精确度要求和难易程度, 基于 DOA 测量的无源雷达系统, 相比基于其他参数的无源雷达系统, 在某些场合具有非常大的优势, 如相比于基于 TDOA 的无源雷达系统, 基于 DOA 的无源雷达系统对时间同步的要求不高, 随着测向理论的发展和电子技术水平的提高, DOA 估计精确度和系统的复杂度方面都越来越容易满足应用的需要^[9-10]。传统的仅基于方位信息对辐射源位置估计方法, 一般采用统计方法得到目标位置的最优估计^[11], 如最大似然估计(Traditional Bearing-only Maximum Likelihood, TBML)^[12-13]。TBML 本质上是在高斯噪声假设下采用“方位测量的总体误差最小化”这一准则来完成对目标位置的估计。

收稿日期: 2018-09-10; 修回日期: 2018-12-25

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61501513; 61701433)

作者简介: 赵 闯(1978-), 男, 副教授, 主要研究方向为无源雷达、阵列信号处理、雷达信号分析。email:rushzhao@163.com

学者们提出了具有代表性的闭环解，如 Stanfield 估计方法和基于正交向量(Orthogonal Vector, OV)方法^[14-15]。这些线性最小二乘算法很容易实现，但这些估计是有偏估计，且偏移量并不随方位测量数目的增加而逐渐减小乃至消除^[14]。有些学者提出消除这些偏移的方法，包括辅助变量(Instrumental Variable, IV)方法^[16]，约束最小二乘(Constrained Least Squares, CLS)方法^[17]和总体最小二乘(Total Least Squares, TLS)^[18]方法等。IV 方法的估计具有连续性、渐进无偏性，且估计值逼近克拉美罗下界(Cramér-Rao Lower Bound, CRLB)。文献[19]已经证明 IV 方法的收敛性对初值和步长非常敏感。对于目标运动分析而言，CLS 方法是渐进无偏的。文献[18]证明了 CLS 方法和 TLS 方法一样，实际上都是一种渐进最大似然估计，CLS 在计算量上低于 TLS 方法，但适用性不如 TLS 广泛。当方位测量有很大误差时，CLS 和 TLS 方法估计目标位置时都会产生较大的均方误差(Root Mean Square Errors, RMSE)。TBML^[20]和非线性最小二乘估计方法也能消除闭环解的有偏估计，当测量数目有限时，闭环解可能会得到一个比传统最大似然估计更小的 RMSE；但当方位测量数目足够多时，TBML 更优于闭环解。在高斯分布噪声的前提下，TBML 的代价函数是目标位置非线性函数^[21]。TBML 中广泛应用类似牛顿迭代法这样的梯度搜索法，但可能会收敛到局部最优。

本文仅基于角度信息的多基地无源雷达对单目标定位方法，提出一种闭环解形式的加权最小二乘(Close-Form Weighted Least Squares, CFWLS)算法。根据定位场景，在建立的定位模型中，将部分未知变量作为已知变量进行处理，使测量参数和目标位置之间伪线性相关。由于定位方程中存在未知多余变量，本文通过在方程两端同时乘以特定矩阵的方法消除多余变量。在确定特定矩阵时，采用奇异值分解(Singular Value Decomposition, SVD)方法。其后，根据噪声大小的不同，设计不同加权矩阵，提高无源雷达系统对目标的定位精确度。

1 定位场景

考虑一个三维的无源雷达对目标的定位场景，包括 M 个外辐射源以及 N 个接收站。第 i 个外辐射源的位置 $\mathbf{X}_{T_i} = [x_{T_i}, y_{T_i}, z_{T_i}]^T$, ($i=1, 2, \dots, M$) 是已知的，第 j 个接收站的位置 $\mathbf{X}_{R_j} = [x_{R_j}, y_{R_j}, z_{R_j}]^T$, ($j=1, 2, \dots, N$) 也是已知的，而目标的位置 $\mathbf{X}_t = [x_t, y_t, z_t]^T$ 是未知的。本文场景有 3 个假设条件：a) 至少 3 个接收站都能收到每个辐射源的直达波信号和目标的反射信号；b) 每个接收站都能够检测到进入接收站的目标回波信号，且能测量出所需的定位参数；c) 每个接收站收到的信号已经进行配对处理。场景中对目标的定位过程为：外辐射源信号照射到目标，然后被目标反射，其后进入到接收机，接收机对目标反射信号进行参数测量，根据定位算法得到目标的三维位置。本文首先建立单外辐射源定位模型，然后扩展到多外辐射源。

目标和第 i 个外辐射源的距离为：

$$R_{iT_i} = \|\mathbf{X}_{T_i} - \mathbf{X}_t\| = \sqrt{(x_{T_i} - x_t)^2 + (y_{T_i} - y_t)^2 + (z_{T_i} - z_t)^2} \quad (1)$$

目标和第 j 个接收站的距离为：

$$R_{tR_j} = \|\mathbf{X}_{R_j} - \mathbf{X}_t\| = \sqrt{(x_{R_j} - x_t)^2 + (y_{R_j} - y_t)^2 + (z_{R_j} - z_t)^2} \quad (2)$$

第 i 个外辐射源到第 j 个接收站之间的距离为：

$$R_{bT_iR_j} = \|\mathbf{X}_{T_i} - \mathbf{X}_{R_j}\| = \sqrt{(x_{T_i} - x_{R_j})^2 + (y_{T_i} - y_{R_j})^2 + (z_{T_i} - z_{R_j})^2} \quad (3)$$

第 i 个外辐射源到坐标原点的距离以及第 j 个接收站到坐标原点的距离分别为：

$$R_{T_i} = \|\mathbf{X}_{T_i}\| = \sqrt{x_{T_i}^2 + y_{T_i}^2 + z_{T_i}^2} \quad (4)$$

$$R_{R_j} = \|\mathbf{X}_{R_j}\| = \sqrt{x_{R_j}^2 + y_{R_j}^2 + z_{R_j}^2} \quad (5)$$

角度 β_{ji} 定义为：第 j 个接收站和目标连线方向与第 j 个接收站和第 i 个外辐射源连线方向的夹角。根据余弦定理建立如下方程：

$$R_{iT_i}^2 = R_{bT_iR_j}^2 + R_{tR_j}^2 - 2R_{bT_iR_j}R_{tR_j}\cos\beta_{ji} \quad (6)$$

把式(2)~式(5)代入式(6)，得

$$(\mathbf{X}_{R_j} - \mathbf{X}_{T_i})^T \mathbf{X}_t = \frac{1}{2}(R_{R_j}^2 + R_{bT_iR_j}^2 - R_{T_i}^2) - (R_{bT_iR_j}\cos\beta_{ji})R_{tR_j} \quad (7)$$

对于 N 个接收站，式(7)可写成矩阵形式：

$$\boldsymbol{\psi}_i \mathbf{X}_i = \mathbf{z}_i - \mathbf{r}_i R_{iR_j} \quad (8)$$

$$\text{式中: } \boldsymbol{\psi}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{R_1}^T - \mathbf{X}_{T_i}^T \\ \vdots \\ \mathbf{X}_{R_N}^T - \mathbf{X}_{T_i}^T \end{bmatrix}_{N \times 3}; \quad \mathbf{z}_i = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} R_{R_1}^2 + R_{b_{T_i R_1}}^2 - R_{T_i}^2 \\ \vdots \\ R_{R_N}^2 + R_{b_{T_i R_N}}^2 - R_{T_i}^2 \end{bmatrix}_{N \times 1}; \quad \mathbf{r}_i = \begin{bmatrix} R_{b_{T_i R_1}} \cos \beta_{i1} \\ \vdots \\ R_{b_{T_i R_N}} \cos \beta_{iN} \end{bmatrix}_{N \times 1}。$$

在式(8)中, 目标的位置 \mathbf{X}_i 以及目标与第 i 个外辐射源的距离 R_{iR_j} 都是未知的。采用 SVD 方法消除未知的 R_{iR_j} , 从而建立新的线性系统。式(8)两边同时乘以矩阵 \mathbf{M}_i , 得到线性方程:

$$\mathbf{M}_i \boldsymbol{\psi}_i \mathbf{X}_i = \mathbf{M}_i \mathbf{z}_i \quad (9)$$

$$\text{式中: } \mathbf{M}_i = \mathbf{V}^T \mathbf{D}_i, \quad \mathbf{D}_i = (\text{diag}(\mathbf{r}_i))^{-1}, \quad \mathbf{V} \text{ 由 } (\mathbf{I} - \mathbf{Z}) \text{ 进行 SVD 分解得到: } (\mathbf{I} - \mathbf{Z}) = \begin{bmatrix} \mathbf{U} & \mathbf{u} \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{\varepsilon} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}^T \\ \mathbf{v}^T \end{bmatrix} = \mathbf{U} \sum_{\varepsilon} \mathbf{V}^T,$$

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{N \times N}, \quad \text{则 } \mathbf{V}^T \mathbf{D}_i \mathbf{r}_i \text{ 为零。}$$

由第 i 个外辐射源方程过渡到 M 个外辐射源方程, 得

$$\mathbf{A} \mathbf{X}_i = \mathbf{b} \quad (10)$$

$$\text{式中: } \mathbf{A} = [(\mathbf{M}_1 \mathbf{S}_1)^T, (\mathbf{M}_2 \mathbf{S}_2)^T, \dots, (\mathbf{M}_M \mathbf{S}_M)^T]^T; \quad \mathbf{b} = [(\mathbf{M}_1 \mathbf{z}_1)^T, (\mathbf{M}_2 \mathbf{z}_2)^T, \dots, (\mathbf{M}_M \mathbf{z}_M)^T]^T。$$

$R_{b_{T_i R_j}}$ 以及 β_{ji} 的测量都有误差, 因此 \mathbf{A} 和 \mathbf{b} 都不准确。用 $\hat{\mathbf{A}}$ 和 $\hat{\mathbf{b}}$ 表示估计值, 替换式(10)中相应的变量后, 其等式左右的误差向量可表示为:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \hat{\mathbf{A}} \mathbf{X}_i - \hat{\mathbf{b}} \quad (11)$$

用加权最小二乘估计可得到 \mathbf{x}_i 的估计值:

$$\hat{\mathbf{X}}_i = (\hat{\mathbf{A}}^T \mathbf{W} \hat{\mathbf{A}})^{-1} \hat{\mathbf{A}}^T \mathbf{W} \hat{\mathbf{b}} \quad (12)$$

式中加权矩阵 \mathbf{W} 为对称正则矩阵, \mathbf{W} 的选取对目标的定位精确度至关重要。

2 低噪声功率下加权矩阵的选取

借鉴文献[2]的分析思路, 选取低噪声功率下的加权矩阵。

用 $\hat{\mathbf{r}}$ 表示根据角度的测量值得到的向量:

$$\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r} + \mathbf{n} \quad (13)$$

式中: \mathbf{r} 为无误差的角度所得到的向量; $\mathbf{n} = [\mathbf{n}_1^T, \mathbf{n}_2^T, \dots, \mathbf{n}_M^T]^T$ 为噪声向量, $\mathbf{n}_i = [n_{i1}, n_{i2}, \dots, n_{iN}]^T$ 为第 i 个外辐射源由 β_{ji} 的测量误差引起的 $R_{b_{T_i R_j}} \cos \beta_{ji}$ 的误差值。

假设 \mathbf{n}_i 内的 MN 个角度测量值 β_{ji} 的误差值服从零均值的高斯分布, 其方差为 $\sigma_{i,j}^2$ ($i=1, 2, \dots, M; j=1, 2, \dots, N$), 其协方差矩阵为:

$$\mathbf{C}_n = \text{diag} \left(\left[\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_M^2 \right]^T \right) \quad (14)$$

$$\text{式中 } \sigma_i^2 = \left[\sigma_{i,1}^2, \sigma_{i,2}^2, \dots, \sigma_{i,N}^2 \right]^T。$$

下面根据角度测量值的误差概率密度函数推导出 \mathbf{n}_i 的概率密度函数, 设:

$$\Gamma = R_{b_{T_i R_j}} \cos \beta_{ji} \quad (15)$$

对式(15)进行全微分分析:

$$\Delta \Gamma = -R_{b_{T_i R_j}} \sin \beta_{ji} \cdot \Delta \beta_{ji} \quad (16)$$

则 Γ 的误差也服从零均值的高斯分布, 其方差为 $\tilde{\sigma}_{i,j}^2 = R_{b_{T_i R_j}}^2 (\sin^2 \beta_{ji}) \sigma_{i,j}^2$, 相应的协方差矩阵为:

$$\mathbf{C}_n = \text{diag} \left(\left[\tilde{\sigma}_1^2, \tilde{\sigma}_2^2, \dots, \tilde{\sigma}_M^2 \right]^T \right) \quad (17)$$

对应式 $\mathbf{D}_i = (\text{diag}(\mathbf{r}_i))^{-1}$ ，使用倒数函数的一阶泰勒展开，得到：

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i = -\mathbf{V}^\top \mathbf{D}_i^2 \mathbf{N}_i (\mathbf{S}_i \mathbf{X}_i - \mathbf{z}_i) + \mathbf{V}^\top \mathbf{n}_i - \frac{1}{2} \mathbf{V}^\top \mathbf{D}_i (\mathbf{I}_M + \mathbf{D}_i \mathbf{N}_i) (\mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i) = \mathbf{V}^\top (\mathbf{I}_M - \mathbf{D}_i \mathbf{R}_{iT_i}) \mathbf{n}_i - \frac{1}{2} \mathbf{V}^\top \mathbf{D}_i (\mathbf{I}_M + \mathbf{D}_i \mathbf{N}_i) (\mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i) \quad (18)$$

式中 $\mathbf{N}_i = \text{diag}(\mathbf{n}_i)$ 。

当噪声较小时，忽略第 2 项，式(18)可简写为：

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i \approx \mathbf{V}^\top (\mathbf{I}_M - \mathbf{D}_i \mathbf{R}_{iT_i}) \mathbf{n}_i \quad (19)$$

因此误差向量依然服从高斯分布，且协方差矩阵为：

$$\mathbf{C}_\varepsilon = \begin{bmatrix} C_{\varepsilon 1,1} & \cdots & C_{\varepsilon 1,M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{\varepsilon M,1} & \cdots & C_{\varepsilon M,M} \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\mathbf{C}_{\varepsilon i} = E\{\boldsymbol{\varepsilon}_i \boldsymbol{\varepsilon}_i^\top\} \approx \mathbf{V}^\top (\mathbf{I}_N - \mathbf{D}_i \mathbf{R}_{iT_i}) \mathbf{C}_{\mathbf{n}_i} (\mathbf{I}_N - \mathbf{D}_i \mathbf{R}_{iT_i}) \mathbf{V} \quad (21)$$

$$\mathbf{C}_{\varepsilon_i, j} = E\{\boldsymbol{\varepsilon}_i \boldsymbol{\varepsilon}_j^\top\} = \mathbf{0}_{N-1}, \quad i \neq j \quad (22)$$

因此低噪声情况下的目标位置加强最小二乘估计为最大似然估计，即：

$$\hat{\mathbf{X}}_i = (\hat{\mathbf{A}}^\top \mathbf{C}_\varepsilon^{-1} \hat{\mathbf{A}})^{-1} \hat{\mathbf{A}}^\top \mathbf{C}_\varepsilon^{-1} \hat{\mathbf{b}} \quad (23)$$

3 误差分析

3.1 方差和目标定位误差分析

假设角度测量误差为高斯白噪声，且均值为零，协方差矩阵如式(17)所示。由于角度测量存在误差，在进行最小二乘估计时，首先利用传统测向交叉定位对目标进行粗估计，然后利用本文算法进行估计，对于偏差明显的目标认为是虚假目标。

误差协方差矩阵计算公式为：

$$\text{Cov}(\hat{\mathbf{x}}_i) = E[\Delta \mathbf{x}_i \Delta \mathbf{x}_i^\top] \quad (24)$$

为了推导协方差矩阵，先推导出 $\Delta \mathbf{x}_i$ 的表达式。

由误差表达式： $\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{b} + \Delta \mathbf{b}$ ， $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \Delta \mathbf{A}$ ，及 $\hat{\mathbf{x}}_i = \mathbf{x}_i + \Delta \mathbf{x}_i$ ，得到

$$(\mathbf{A}^\top + \Delta \mathbf{A}^\top) \mathbf{W} (\mathbf{A} + \Delta \mathbf{A}) (\mathbf{x}_i + \Delta \mathbf{x}_i) = (\mathbf{A}^\top + \Delta \mathbf{A}^\top) \mathbf{W} (\mathbf{b} + \Delta \mathbf{b}) \quad (25)$$

整理式(25)得

$$\Delta \mathbf{x}_i = -(\mathbf{A}^\top \mathbf{W} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^\top \mathbf{W} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (26)$$

把式(26)代入式(24)得

$$\text{Cov}(\hat{\mathbf{x}}_i) = (\mathbf{A}^\top \mathbf{W} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^\top \mathbf{W} \mathbf{C}_\varepsilon \mathbf{W} \mathbf{A} (\mathbf{A}^\top \mathbf{W} \mathbf{A})^{-1} \quad (27)$$

而目标位置的偏移量为：

$$\text{bias}_{\mathbf{x}_i} = E\{\Delta \mathbf{x}_i\} = -(\mathbf{A}^\top \mathbf{W} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^\top \mathbf{W} E\{\boldsymbol{\varepsilon}\} \quad (28)$$

其中，误差向量由式(18)计算得到。

3.2 CRLB 分析

目标位置的偏移量较小，和目标位置的方差相比，可以忽略，这样可将上述估计视为无偏估计。CRLB 由 Fisher 信息矩阵得到，Fisher 信息矩阵可表示为：

$$\mathbf{I}(\mathbf{x}_i) = E \left[\left(\frac{\partial \ln p(\mathbf{r}; \mathbf{x}_i)}{\partial \mathbf{x}_i} \right)^\top \left(\frac{\partial \ln p(\mathbf{r}; \mathbf{x}_i)}{\partial \mathbf{x}_i} \right) \right] \quad (29)$$

式中 $p(\mathbf{r}; \mathbf{x}_i)$ 表示含有 \mathbf{x}_i 参数的 \mathbf{r} 的概率密度函数。在高斯噪声前提下，用 \mathbf{u}_r 表示均值向量，用 \mathbf{C}_r 表示协方差矩阵，则 Fisher 矩阵可表示为：

$$\mathbf{I}(\mathbf{x}_i) = \left(\frac{\partial \mathbf{u}_r}{\partial \mathbf{x}_i} \right)^\top \mathbf{C}_r^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{u}_r}{\partial \mathbf{x}_i} \right) + \frac{1}{2} \text{tr} \left[\left(\mathbf{C}_r^{-1} \frac{\partial \mathbf{u}_r}{\partial \mathbf{x}_i} \right)^2 \right] \quad (30)$$

经推导，式(30)的第 2 项为零，因此 CRLB 可简化为：

$$CRLB(\mathbf{x}_t) = \mathbf{I}^{-1}(\mathbf{x}_t) = \left[\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{x}_t} \right)^T \mathbf{C}_n^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{x}_t} \right) \right]^{-1} \quad (31)$$

式中 \mathbf{C}_n 由式(17)确定。根据矩阵微分定义得

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{x}_t} = \left[\left(\frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial \mathbf{x}_t} \right)^T, \left(\frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial \mathbf{x}_t} \right)^T, \dots, \left(\frac{\partial \mathbf{r}_M}{\partial \mathbf{x}_t} \right)^T \right]^T \quad (32)$$

由式(1)~式(3)和式(6), 可知:

$$R_{b_{T,R_j}} \cos \beta_{ji} = R_{b_{T,R_j}} \frac{R_{b_{T,R_j}}^2 + R_{t_{R_j}}^2 - R_{t_{T_i}}^2}{2R_{b_{T,R_j}}R_{t_{R_j}}} = R_{b_{T,R_i}} \frac{R_{b_{T,R_i}}^2 + \|\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_{R_j}\|^2 - \|\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_{T_j}\|^2}{2R_{b_{T,R_i}}\|\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_{R_j}\|} = \frac{1}{2} \left(\frac{R_{b_{T,R_j}}^2}{\|\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_{R_j}\|} + \|\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_{R_j}\| - \frac{\|\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_{T_j}\|^2}{\|\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_{R_j}\|} \right) \quad (33)$$

对式(33)进行微分:

$$\frac{\partial R_{b_{T,R_j}} \cos \beta_{ij}}{\partial \mathbf{x}_t} = \frac{1}{2} \left(\frac{R_{b_{T,R_j}}^2 (\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_{R_j})^T}{\|\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_{R_j}\|^2} + \frac{(\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_{R_j})^T}{\|\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_{R_j}\|} - \frac{\|\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_{T_i}\|^2 (\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_{R_j})^T}{\|\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_{R_j}\|^2} - \frac{2\|\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_{T_j}\| (\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_{T_j})^T}{\|\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_{R_j}\| \|\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_{T_j}\|} \right) \quad (34)$$

把式(34)写成矩阵形式, $\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{x}_t}$ 可表示为:

$$\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{x}_t} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{R_{b_{T,R_1}}^2 (\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_{R_1})^T}{\|\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_{R_1}\|^2} + \frac{(\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_{R_1})^T}{\|\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_{R_1}\|} - \frac{\|\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_{T_1}\|^2 (\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_{R_1})^T}{\|\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_{R_1}\|^2} - \frac{2\|\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_{T_1}\| (\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_{T_1})^T}{\|\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_{R_1}\| \|\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_{T_1}\|} \\ \vdots \\ \frac{R_{b_{T,R_N}}^2 (\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_{R_N})^T}{\|\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_{R_N}\|^2} + \frac{(\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_{R_N})^T}{\|\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_{R_N}\|} - \frac{\|\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_{T_N}\|^2 (\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_{R_N})^T}{\|\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_{R_N}\|^2} - \frac{2\|\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_{T_N}\| (\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_{T_N})^T}{\|\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_{R_N}\| \|\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_{T_N}\|} \end{bmatrix} \quad (35)$$

把式(35)代入式(31)就能得到目标定位估计算法的 CRLB。

4 仿真分析

在仿真场景中, 接收站的布置位置按照最少数目设置。仿真分析中, 角度的测量值误差为加性误差, 该误差服从零均值且误差方差为 $\sigma_{\beta_j} = 10^{-3} \beta_{ij}$ 。假设每个接收站的角度测量是独立的。在仿真过程中, 误差的方差和偏移由 1 000 次 Monte-Carlo 得到。用 RMSE 衡量定位性能, RMSE 定义为:

$$RMSE(\hat{\mathbf{p}}) = \sqrt{E\{\|\hat{\mathbf{p}} - \mathbf{p}\|^2\}} = \sqrt{Var(x) + Bias_x^2 + Var(y) + Bias_y^2} \quad (36)$$

4.1 不同估计方法比较

将本文提出的方法与其他 WLS 方法在 CRLB 上进行比较。分别对不同数目的外辐射源和接收站进行仿真分析, 仿真中, 为了分析不同方位的外辐射源和接收站的部署对目标位置的影响, 表 1 给出了外辐射源和接收站的位置。

图 1~图 3 分别给出了 x 方向、 y 方

向以及 z 方向目标位置误差的标准方差。从图 1~图 3 中可看出, 本文所提出的 WLS 性能优于 LS 方法, 且本文所提的 WLS 在性能上优于文献[22]中仅基于角度信息的目标位置估计方法。从图 1~图 3 中还可看出, 本文所提的 WLS 算法在 x 方向以及 y 方向接近最优, 即目标定位误差接近 CRLB 的根值。算法在 z 方向的估计误差较大, 主要原因是在 z 方向上, 外辐射源和接收站缺乏一定的空间分布。

表 1 外辐射源与接收站位置

Table1 Non-cooperative illuminator and receiver station							
non-cooperative illuminator	T_{x1}/km	T_{x2}/km	T_{x3}/km	T_{x4}/km	T_{x5}/km	T_{x6}/km	-
X-value	0	22.00	-22.00	0	44.00	0	-
Y-value	0	11.87	-11.87	-25.00	-23.75	50.00	-
Z-value	0.30	0.45	0.20	0.30	0.20	0.70	-
receiver	R_{x1}/km	R_{x2}/km	R_{x3}/km	R_{x4}/km	R_{x5}/km	R_{x6}/km	R_{x7}/km
X-value	22.00	0	-22.00	44.00	-44.00	0	-44.00
Y-value	-11.87	25.00	-11.87	23.75	23.75	-50.00	-23.75
Z-value	0	0.20	0.35	0.50	0.40	0.10	0.15

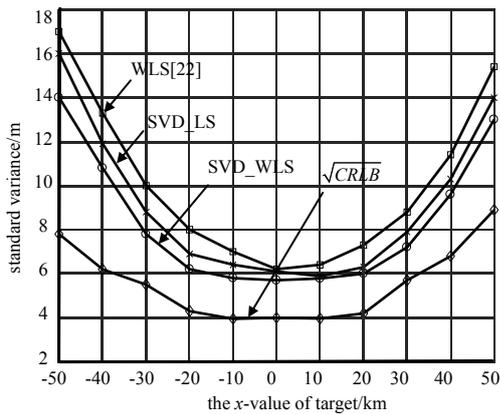


Fig.1 Variance of x direction and CRLB comparison diagram for different estimation methods

图 1 不同估计方法下 x 方向的方差以及 CRLB 比较图

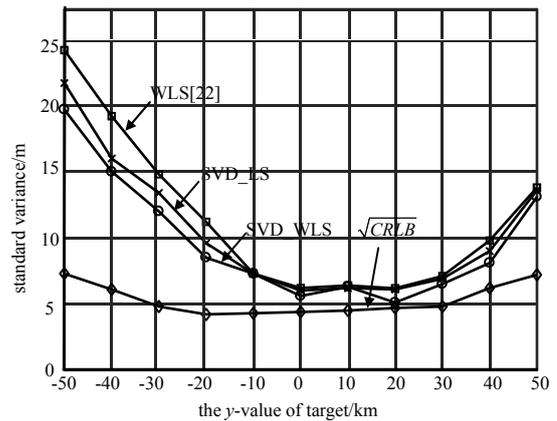


Fig.2 Variance of y direction and CRLB comparison diagram for different estimation methods

图 2 不同估计方法下 y 方向的方差以及 CRLB 比较图

4.2 接收站位置对目标定位精确度分析

假设目标在 100 km 的被监视范围内，讨论接收站的位置变化对目标定位的精确度分析。不妨设有 3 个接收站，外辐射源也在该区域内。表 2 给出了 4 种不同的接收站位置关系， $R_0 = 100$ km 为监视区域半径。目标位置分别置于 $(i, j) \times 10$ km, $i, j \in Z$ 。

表 2 接收站不同位置配置示意图

Table2 Different position configurations of receiving station

location configuration type	x-value	receiver 1	receiver 2	receiver 3
1	x_i	$R_0 \cos 30^\circ$	$-R_0 \cos 30^\circ$	0
	y_i	$R_0 \sin 30^\circ$	$R_0 \sin 30^\circ$	$-R_0$
2	x_i	$R_0 \cos 45^\circ$	$-R_0 \cos 45^\circ$	0
	y_i	$R_0 \sin 45^\circ$	$R_0 \sin 45^\circ$	$-R_0$
3	x_i	$R_0 \cos 60^\circ$	$-R_0 \cos 60^\circ$	0
	y_i	$R_0 \sin 60^\circ$	$R_0 \sin 60^\circ$	$-R_0$
4	x_i	$R_0 \cos 60^\circ$	$-R_0 \cos 30^\circ$	0
	y_i	$R_0 \sin 60^\circ$	$R_0 \sin 30^\circ$	$-R_0$

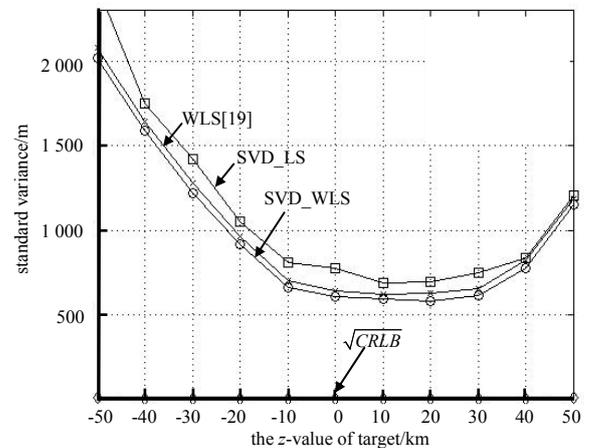


Fig.3 Variance of z direction and CRLB comparison diagram for different estimation methods

图 3 不同估计方法下 z 方向的方差以及 CRLB 比较图

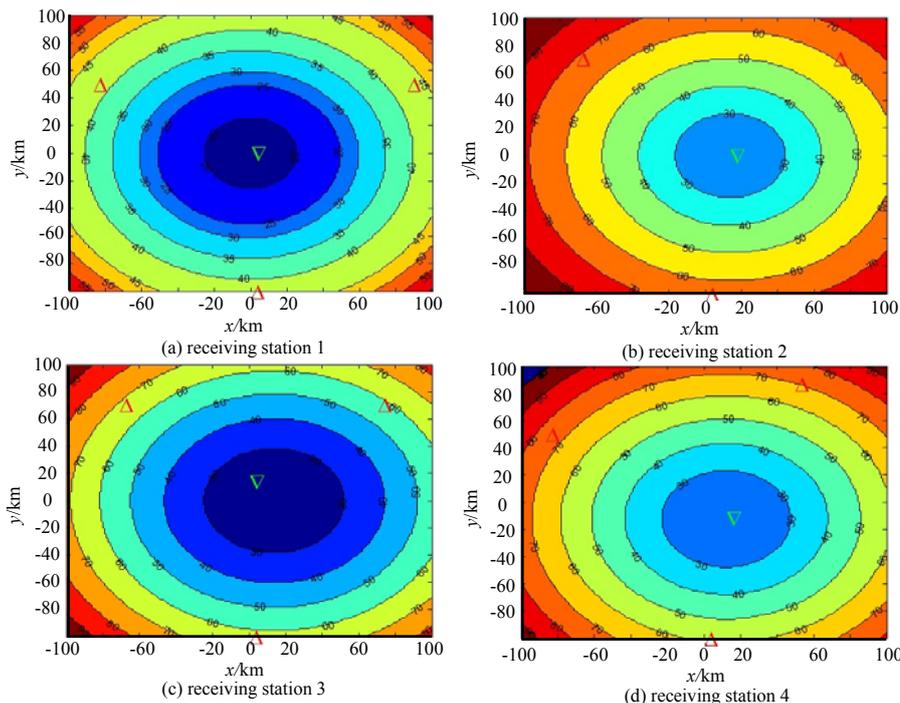


Fig.4 Performance analysis of the algorithm for four different receiving stations

图 4 本文算法在 4 个不同接收站位置配置下的性能分析

图 4 给出了 4 种不同位置配置的 RMSE 等高线图, 图中正三角表示接收站位置, 倒三角表示外辐射源位置。从图中可看出随着距离的增加, 目标位置估计误差也在增加。多接收站位置分布越均匀越有利于提高对目标的定位精确度, 误差值验证了本文算法的方差理论值和仿真分析结果基本一致。

从图 4 中也可看出第一种配置比其他配置的 RMSE 相对更小。这样, 无源雷达系统中多接收站时的第 1 种配置性能更佳, 即等边三角形的配置是在 RMSE 最小准则下的最佳配置。

5 结论

本文给出了一种在多基地无源雷达系统中仅基于角度信息的对单目标定位的闭环 WLS 估计方法。首先建立一个仅基于角度信息的线性方程用于对单目标的定位, 但该方程含有冗余的未知变量, 通过 SVD 方法得到特定矩阵以消除中间冗余的未知变量; 根据测量噪声的大小不同, 给出了 2 种 WLS 实现流程; 推导了所提出的对目标位置估计方法的 CRLB。通过仿真分析, 所提出的对目标估计方法相比估计的标准差, 具有很小的偏移, 并且等边三角形是接收站的最佳位置部署。

参考文献:

- [1] ZAIMBASHI A. Broadband target detection algorithm in FM-based passive bistatic radar systems[J]. IET Radar, Sonar & Navigation, 2016, 10(8):1485–1499. doi:10.1049/iet-rsn.2015.0608.
- [2] NOROOZI A, SEBT M A. Target localization from bistatic range measurements in multi-transmitter multi-receiver passive radar[J]. Signal Processing Letters IEEE, 2015, 22(12):2445–2449. doi:10.1109/LSP.2015.2491961.
- [3] 万显荣, 程熠瑶, 易建新, 等. DTMB 外辐射源雷达参考信号重构信道估计新方法[J]. 电子与信息学报, 2017, 39(5):1044–1050. (WAN Xianrong, CHENG Yiyao, YI Jianxin, et al. Novel channel estimation of reference signal reconstruction for DTMB-based passive radar[J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2017, 39(5):1044–1050.)
- [4] MEESOOKHO Chartchai, MITRA Urbashi, NARAYANAN Shrikanth. On energy-based acoustic source localization for sensor networks[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2007, 56(1):365–377. doi:10.1109/TSP.2007.900757.
- [5] WEI J, HAIMOVICH A M. Cramer–Rao Bound and approximate maximum likelihood estimation for non-coherent direction of arrival problem[C]// Proceedings of the 2016 Annual Conference on Information Science and Systems(CISS). 2016:506–510. doi:10.1109/CISS.2016.7460554.
- [6] LIU Zhangmeng, HUANG Zhitao, ZHOU Yiyu. An efficient maximum likelihood method for direction-of-arrival estimation via sparse Bayesian learning[J]. IEEE Transactions on Wireless Communications, 2012, 11(10):1–11. doi:10.1109/TWC.2012.090312.111912.
- [7] NOROOZI Ali, SEBT Mohammad Ali. Spherical interpolation method of emitter localisation using weighted least squares[J]. IET Signal Processing, 2016, 10(8):841–854. doi:10.1049/iet-spr.2015.0237.
- [8] HO K C. Bias reduction for an explicit solution of source localization using TDOA[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2012, 60(5):2101–2114. doi:10.1109/TSP.2012.2187283.
- [9] PALMER James. A signal processing scheme for a multichannel passive radar system[C]// Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing. 2015:5575–5579. doi:10.1109/ICASSP.2015.7179038.
- [10] 王占刚, 巴斌, 王廷肖, 等. 基于自适应重采样次数的协方差角度估计算法[J]. 太赫兹科学与电子信息学报, 2017, 15(3):425–431. (WANG Zhanggang, BA Bin, WANG Tingxiao, et al. A covariance-based DOA algorithm based on adaptive resampling[J]. Journal of Terahertz Science and Electronic Information Technology, 2017, 15(3):425–431.)
- [11] 王鼎, 张莉, 吴瑛. 基于角度信息的约束总体最小二乘无源定位算法[J]. 中国科学:技术科学, 2006, 36(8):880–890. (WANG Ding, ZHANG Li, WU Ying. Constrained least squares passive location algorithm based on angle information[J]. Science in China(SERIES E), 2006, 36(8):880–890.)
- [12] BISHOP A N, ANDERSON B D O, FIDAN B, et al. Bearing-only localization using geometrically constrained optimization[J]. IEEE Transactions on Aerospace & Electronic Systems, 2009, 45(1):308–320. doi:10.1109/TAES.2009.4805281.
- [13] GRIFFIN Anthony, ALEXANDRIDIS Anastasios, PAVLIDI Despoina, et al. Localizing multiple audio sources in a wireless acoustic sensor network[J]. Signal Processing, 2015(107):54–67. doi:10.1016/j.sigpro.2014.08.013.
- [14] DOGANÇAY K. Relationship between geometric translations and TLS estimation bias in bearings-only target localization[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2008, 56(3):1005–1017. doi:10.1109/TSP.2007.909052.
- [15] NGUYEN N H, DOĞANÇAY K. Improved pseudolinear Kalman filter algorithms for bearings-only target tracking[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2017, 65(23):6119–6134. doi:10.1109/TSP.2017.2749207.