

文章编号: 2095-4980(2022)08-0849-08

## 基于标准数学规划的非光滑器件/电路的建模及仿真

闫佩玉, 李琦

(山东华宇工学院 基础教学部, 山东 德州 253034)

**摘要:** 针对非光滑器件/电路的非光滑特性, 提出了一种基于标准数学规划问题的建模及仿真。首先将非光滑器件建模为有可能发生状态跳变的分段线性函数; 其次给出了由这些非光滑器件构成的电路的非光滑线性特性的动态系统方程; 然后对这些非光滑动态系统方程进行时间离散化得到各种类型的一步非光滑问题, 如(线性)互补问题或具有等式-不等式约束的非线性(或二次)规划, 进而进行数值求解。仿真实验结果表明, 本文所提出的数值建模方法对于具有大量事件的非光滑系统是有效的, 对于模型参数的变化具有鲁棒性。

**关键词:** 非光滑器件/电路; 非光滑特性; 分段线性; 标准数学规划; 互补问题; 动态系统方程; 鲁棒性

中图分类号: TM46

文献标志码: A

doi: 10.11805/TKYDA2020278

## Modeling and simulation of non-smooth devices/circuits based on standard mathematical programming

YAN Peiyu, LI Qi

(Basic Teaching Department, Shandong Huayu University of Technology, Dezhou Shandong 253034, China)

**Abstract:** Aiming at the non-smooth characteristics of the non-smooth devices/circuits, a modeling and simulation method based on the standard mathematical programming problem is proposed. Firstly, the non-smooth device is modeled as a Piecewise Linear(PWL) function with a possible state jumping. Secondly, some dynamic system equations of the non-smooth linear characteristic of the circuit formed by the non-smooth devices are given. Then, the time discretization is applied to these non-smooth dynamic system equations, and various types of one-step non-smooth problems are yielded, such as (linear) complementary problems or nonlinear(or quadratic) programming with equation-inequality constraints. The numerical solution is carried out. The simulation results show that the proposed numerical modeling method is effective for non-smooth systems with a large number of events and is robust to the variation of model parameters.

**Keywords:** non-smooth device/circuit; non-smooth characteristics; Piecewise Linear(PWL); standard mathematical programming; complementary problem; dynamic system equation; robustness

众所周知, 基于牛顿-拉普森(Newton-Raphson)非线性求解器和考虑系统全部模式的事件驱动方法的传统仿真工具在用于非光滑电路时存在严重的缺陷, 因此, 需要采用其他的数值方法用于高度非光滑电路的建模和仿真。由于数值方法总是依赖于特定的建模方法, 因此首先要考虑非光滑器件(如二极管、开关和晶体管等)以及由非光滑器件构成的电路的模型; 非光滑器件通常用分段线性(PWL)函数表示, 或者用互补关系表示, 或者用法锥包含表示。文献[1]提出了基于轨迹分段线性化方法的非线性宏建模方法, 但这种建模方法对于非光滑器件或电路存在局限性。文献[2-3]提出了非光滑电子电路中的分段线性建模方法。但文献[2]提出的基于典型分段线性函数的模型的复杂度较高, 且具有较大的误差性能; 文献[3]研究了非线性器件的不同PWL模型, 讨论了分段常数法、单纯分段线性化法和典型分段线性化法, 但这种建模方法对于更复杂的非线性电路准确性不高。文献[4]提出的分段线性恒流LED驱动模型没有考虑电路中非线性器件的工作特性和实时仿真带来的时间消耗。文献[5]提

收稿日期: 2020-06-16; 修回日期: 2020-08-30

基金项目: 山东省教育科学“十二五”规划课题(CBS15007); 山东省人文社科课题(J16WB01); 山东华宇工学院教改课题(2019JG38)

出了应用于电子电路的互补问题，文献[6]对此进行了研究。为获得布尔函数的紧凑逻辑表示，文献[7]提出一种混合 Reed-Muller 和对偶 Reed-Muller(RM-DRM)逻辑模型；文献[8]提出了采用延迟多功能的理想开关建模，开关由电路的电流变量以显式方式控制，这不利于离散时间中的单边约束和演变过程中可能存在的非光滑性以一致方式进行数值积分。文献[9]采用分段光滑开关模型，证明了电流模式 Boost 变换器具有丰富的非线性现象。文献[10]在电子器件中引入了第二类变分不等式和超电势，但仅用于研究静态电路解的存在唯一性或采用非光滑器件的动态电路的平衡。

本文提出了一种基于标准数学规划问题的非光滑器件/电路的建模及仿真。首先将非光滑器件建模为有可能发生状态跳变的分段线性函数，其次给出了由这些非光滑器件构成的电路的非光滑线性特性的动态系统方程；然后对这些非光滑动态系统方程进行时间离散化得到各种类型的一步非光滑问题(One-Step Non-Smooth Problems, OSNSP)，进而进行数值求解。仿真实验结果表明，本文所提出的数值建模方法对于具有大量事件的非光滑系统是有效的和鲁棒的。

### 1 基于标准数学规划问题的非光滑器件/电路的建模

首先给出定义：设  $K \subseteq IR^n$  为非空凸集，在  $x \in IR^n$  处对  $K$  的法锥为  $N_K(x) = \{z \in IR^n | \langle z, \zeta - x \rangle \leq 0, \text{ 对于所有 } \zeta \in K\}$ ，向量  $x \in IR^n$  的欧氏度量到  $K$  上的投影表示为  $proj[K; x]$ 。  $IR^{m \times m}$  中的单位矩阵表示为  $I_m$ ，  $IR^m$  中的零向量表示为  $0_m$ 。

本文采用以下标准数学规划问题。

**定义 1(变分不等式<sup>[11]</sup>)**：给定一个函数  $F: IR^n \rightarrow IR^p$  和  $IR^p$  的一个非空子集  $\Omega$ ，则变分不等式(Variational Inequality, VI)问题就是寻找向量  $z \in IR^p$ ，使得

$$F^T(z)(y-z) \geq 0 \quad \forall y \in \Omega \tag{1}$$

**定义 2(法锥包含<sup>[12]</sup>)**：给定一个函数  $F: IR^p \rightarrow IR^p$  和  $IR^p$  的一个非空凸子集  $K$ ，则法锥包含问题就是寻找向量  $z \in IR^p$ ，使得

$$0 \in F(z) + N_K(z) \tag{2}$$

如果  $K = \Omega$  为一个凸集，则包含式(2)和 VI 式(1)是等价的。

**定义 3(混合互补问题<sup>[13]</sup>)**：混合互补问题(Mixed Complementarity Problem, MCP)定义为：给定一个函数  $F: IR^p \rightarrow IR^p$  和下界以及上界  $l, u \in (IR \cup \{+\infty, -\infty\})^p$ ，寻找向量  $z \in IR^p$ ，  $w, v \in IR_+^p$ ，使得

$$\begin{cases} F(z) = w - v \\ l \leq z \leq u, (z-l)^T w = 0, (u-z)^T v = 0 \end{cases} \tag{3}$$

MCP 的解满足包含  $-F(z) \in N_{[l,u]}(z)$ 。如果式(3)中的  $F(\cdot)$  是仿射的，即

$$\begin{cases} Mz + q = w - v \\ l \leq z \leq u, (z-l)^T w = 0, (u-z)^T v = 0 \end{cases} \tag{4}$$

则对于某个矩阵  $M \in IR^{p \times p}$  和某个向量  $q \in IR^m$ ，式(3)的 MCP 就定义了一个混合线性互补问题(Mixed Linear Complementarity Problem, MLCP)。

#### 1.1 非光滑电子器件的建模

把非光滑电子器件的电流-电压定律表示为一个凸集  $K$  的法锥包含，即  $0 \in \Phi(y, \lambda, t) + N_K(\lambda)$ ，其中  $\Phi(\cdot)$  是一个函数，  $y$  和  $\lambda$  为从函数  $0 = H(X, \lambda, t)$  和  $y = G(X, \lambda, t)$  隐式定义的松弛变量，  $X$  为电路的状态向量，由支路电压和电流构成。

下面分别对构成本文研究的非光滑电路的 4 种非光滑器件—二极管、开关、晶体管和比较器进行建模。

##### 1.1.1 非光滑二极管

二极管端口上的电流和电压表示如图 1(a)所示，图 1(b)所示为其非光滑模型。

对于图 1(b)所示的具有剩余电流  $-a$  和电压  $-b$  的理想二极管模型，由下列互补条件定义：

$$0 \leq i(t) + a \perp v(t) + b \geq 0 \tag{5}$$

式中  $x \perp y$  表示  $x^T y = 0$ ，且  $a$  和  $b$  为  $i$  和  $v$  的阈值。

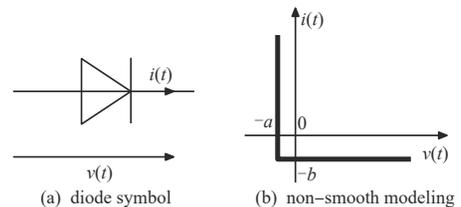


Fig.1 Diode symbol and its non-smooth modeling  
图 1 二极管符号及其非光滑模型

图 1(b)的二极管具有以下电流/电压定律：

$$i(t) \in \{b\} + N_{[-\infty, a]} v(t) \Leftrightarrow v(t) \in \{a\} + N_{[-\infty, b]} i(t) \quad (6)$$

### 1.1.2 非光滑开关

图 2 所示为理想开关端口上的电流和电压表示，其模型如下：

$$v(t) = \begin{cases} R_{\text{off}} i(t) & u_c(t) < 0 \\ R_{\text{on}} i(t) & u_c(t) \geq 0 \end{cases} \quad (7)$$

式中：电压  $u_c(\cdot)$  为整个动态系统的状态变量； $v(\cdot)$  为开关的电压； $i(\cdot)$  为流过开关的电流；电阻  $R_{\text{off}} \gg 1$  和  $R_{\text{on}} \ll 1$  由设计选择。式(7)的开关建模如下：

$$\begin{cases} v(t) = \frac{1}{2} [1 + \tau(t)] R_{\text{on}} i(t) + \frac{1}{2} [1 - \tau(t)] R_{\text{off}} i(t) \\ \tau(t) \in \text{sgn}[u_c(t)] \Leftrightarrow u_c(t) \in -N_{[-1, 1]} \tau(t) \end{cases} \quad (8)$$

对于任意的  $i(t) \neq 0$ ，在  $u_c(t) = 0$  时，式(7)的电压  $v(t)$  是不连续的，跳跃幅度等于  $|(R_{\text{off}} - R_{\text{on}})i(t)|$ 。式(8)意味着在  $u_c(t) = 0$ ， $i(t) \neq 0$  时，不连续性是“填充”的，因而模型是多值的，这正是允许平滑仿真滑模的原因。

### 1.1.3 非光滑 MOSFET 晶体管

图 3 所示为 nMOS 端口上的电流和电压表示。以 nMOS 为例，其静态特性的 Sah 模型为<sup>[3]</sup>：

$$I_{\text{DS}} = \frac{K}{2} [f(V_G - V_S - V_T) - f(V_G - V_D - V_T)] \quad (9)$$

式中： $K = \mu \frac{\epsilon_{\text{ox}} W}{t_{\text{ox}} L}$ ， $\mu$  是多数载流子的迁移率， $W$  和  $L$  分别为沟道的宽度和长度， $\epsilon_{\text{ox}}$  是栅氧化层厚度为  $t_{\text{ox}}$  的透光率； $V_T$  是依赖于工艺的阈值电压。

式(9)中的函数  $f$  定义为：

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases} \quad (10)$$

该函数的分段和二次特性可用下面有  $s$  段的分段线性函数近似：

$$f_{\text{pwl}}(x) = \alpha_i x + \beta_i, \alpha_i \leq x \leq \alpha_{i+1}, i = -1, \dots, s+1 \quad (11)$$

式中  $\alpha_i$  和  $\beta_i$  为线性近似参数， $\alpha_i$  为相应的段参数，且  $\alpha_{-1} = -\infty$  和  $\alpha_{s+1} = +\infty$ 。式(11)中有  $s$  段的分段线性 nMOS 晶体管的完整模型可用以下混合线性互补形式重新写为：

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & -b & \dots & -b \\ -b & \dots & -b & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^T v(t) + \lambda(t) + [h_1 \dots h_{s-1} \dots h_1 \dots h_{s-1}]^T \quad (12)$$

$$0 = I_3 i(t) + \begin{bmatrix} -c_1 & \dots & -c_{s-1} & c_1 & \dots & c_{s-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & \dots & c_{s-1} & -c_1 & \dots & -c_{s-1} \end{bmatrix} \lambda(t) \quad (13)$$

$$0 \leq y(t) \perp \lambda(t) \geq 0 \quad (14)$$

$$u(t) = \begin{bmatrix} U_{\text{GD}}(t) = V_G(t) - v_D(t) \\ U_{\text{GS}}(t) = V_G(t) - v_S(t) \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$i(t) = \begin{bmatrix} I_D(t) \\ I_G(t) \\ I_S(t) \end{bmatrix} \quad (16)$$

参数  $b = K/2$ ， $h_i = b(V_T + \alpha_i)$ ， $i = 1, 2, \dots, s$ 。 $c_i$  的值由式(11)中  $\alpha_i$  和  $\beta_i$  的线性近似来计算。采用基本的凸分析，得到式(14)和(15)的简洁形式为：

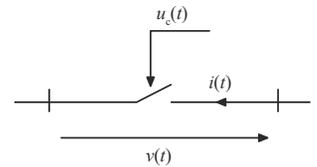


Fig.2 Ideal switch symbols  
图 2 理想开关符号

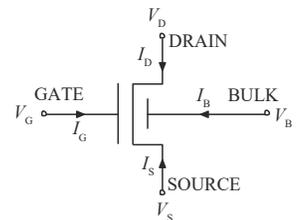


Fig.3 nMOS transistor symbols  
图 3 nMOS 晶体管符号

$$\begin{cases} -\lambda(t) + \mathbf{B}u(t) + \mathbf{h}(t) \in N_K(\lambda(t)) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{B}u(t) + \lambda(t) + \mathbf{h}(t) \\ \mathbf{0} = \mathbf{i}(t) + \mathbf{C}\lambda(t) \end{cases} \quad (17)$$

pMOS 晶体管可用同样的方法表示，这时  $\mathbf{i}(t)$  变为  $-\mathbf{i}(t)$ ， $b$  变为  $-b$ 。

式(11)中的分段线性模型有  $s$  段，本文选择了采用 6 段的一个模型，以使 MLCP 大小不会增加太多。

### 1.1.4 非光滑比较器

比较器及其模型如图 4 所示，建模为一个分段线性函数。当  $x < -\varepsilon$  V 时其值为  $V_{\min}$ ，当  $x > \varepsilon$  V 时为  $V_{\max}$ ，对于  $\varepsilon=0$  得到一个在 0 处多值的函数。多值比较器建模如下：

$$V_{\text{out}} \in N_{[V_{\min}, V_{\max}]}(V_+ - V_-) \quad (18)$$

式中  $V_{\min}$  和  $V_{\max}$  为饱和阈值。

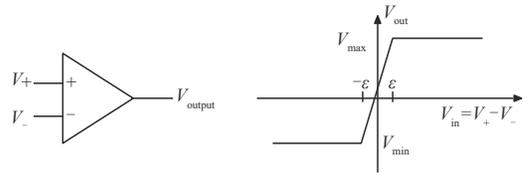


Fig.4 Comparator model  
图4 比较器模型

### 1.2 动态系统方程

本节给出由 1.1 讨论的这些非光滑器件构成的非光滑电路的动态系统方程。包含和等式的含有非光滑器件的电路，以及微分代数方程(Differential Algebraic Equations, DAE)的网络的非光滑线性特性，可以简洁地写成：

$$\begin{cases} \mathbf{M}(\mathbf{X}, t)\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) + \mathbf{U}(t) \text{ 半显式DAE} \\ \begin{cases} \mathbf{0} = \mathbf{H}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\lambda}, t) \\ \mathbf{y} = \mathbf{G}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\lambda}, t) \end{cases} \text{ 非光滑器件的输入/输出关系} \\ \mathbf{0} \in \Phi(\mathbf{y}, \boldsymbol{\lambda}, t) + N_K(\boldsymbol{\lambda}) \text{ 包含规则} \end{cases} \quad (19)$$

式中： $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$  是由感性支路、电压定义支路和非光滑支路中的电压和电流构成的状态；向量  $\mathbf{y}, \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m$  为表示器件的非光滑多值模型的松弛变量。假设  $\mathbf{M}: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ ， $\mathbf{H}: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$ ， $\mathbf{G}: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  和  $\Phi: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  为连续可微函数。

### 1.3 时间离散化步进算法

根据式(19)的动态性，本文提出的时间离散化步进方案如下：

$$\begin{cases} \mathbf{M}(\mathbf{X}_{k+\theta}, t_{k+\theta})(\mathbf{X}_{k+1} - \mathbf{X}_k) = h\mathbf{F}(\mathbf{X}_{k+\theta}, t_{k+\theta}) + h\mathbf{U}(t_{k+\theta}) \\ \mathbf{0} = \mathbf{H}(\mathbf{X}_{k+1}, \boldsymbol{\lambda}_{k+1}, t_{k+1}) \\ \mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{G}(\mathbf{X}_{k+1}, \boldsymbol{\lambda}_{k+1}, t_{k+1}) \\ \mathbf{0} \in \Phi(\mathbf{y}_{k+1}, \boldsymbol{\lambda}_{k+1}, t_{k+1}) + N_K(\boldsymbol{\lambda}_{k+1}) \end{cases} \quad (20)$$

式(20)就是一个一步非光滑问题(OSNSP)。对于时间步长  $h > 0$  和函数  $f(t)$ ，通常采用  $f_{k+1} \approx f(t_{k+1})$  和  $f_{k+\theta} = \theta f_{k+1} + (1-\theta)f_k$ ，则时间离散化步进算法是由假设充分光滑的  $\theta$ -方法 ( $\theta \in [0, 1]$ ) 和非光滑的包含规则的完全隐式格式构成。其好处在于：一是对包含规则的考虑及其内在的多值性和单向性；二是演变过程可能存在非光滑性，只有通过隐式低阶格式才能以一致的方式进行数值积分<sup>[14]</sup>。

为此，用一个全局包含形式重写问题式(20)：

$$\mathbf{0} \in \mathbf{F}(\mathbf{z}) + N_C(\mathbf{z}) \quad (21)$$

式中：变量  $\mathbf{z} = [\mathbf{X}_{k+1}, \mathbf{y}_{k+1}, \boldsymbol{\lambda}_{k+1}]^T \in \mathbb{R}^{n+2m}$ ；函数  $\mathbf{F}: \mathbb{R}^{n+2m} \rightarrow \mathbb{R}^{n+2m}$  定义如下：

$$\mathbf{F}(\mathbf{z}) = \begin{cases} \mathbf{M}[\theta \mathbf{X}_{k+1} + (1-\theta)\mathbf{X}_k, t_{k+\theta}](\mathbf{X}_{k+1} - \mathbf{X}_k) - h\mathbf{F}[\theta \mathbf{X}_{k+1} + (1-\theta)\mathbf{X}_k, t_{k+\theta}] - h\mathbf{U}(t_{k+\theta}) \\ \mathbf{H}(\mathbf{X}_{k+1}, \boldsymbol{\lambda}_{k+1}, t_{k+1}) \\ \mathbf{G}(\mathbf{X}_{k+1}, \boldsymbol{\lambda}_{k+1}, t_{k+1}) - \mathbf{y}_{k+1} \\ \Phi(\mathbf{y}_{k+1}, \boldsymbol{\lambda}_{k+1}, t_{k+1}) \end{cases} \quad (22)$$

法锥  $N_C$  是对于下列凸集的法锥：

$$\mathbf{C} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbf{K} \subset \mathbb{R}^{n+2m} \quad (23)$$

式(20)的 OSNSP 是一个 VI，以式(21)的一个凸集的法锥形式写出。式(20)的数值求解主要依赖于凸集  $\mathbf{K}$  的结

构。下面给出  $K$  的选择。根据本文的一步非光滑问题的类型，采用以下方法：

1)  $K$  是一个有限可表示凸集：实际上，凸集可有限地表示为：

$$K = \{\lambda \in \mathbb{R}^m, h(\lambda) = 0, g(\lambda) \geq 0\} \quad (24)$$

式中假定函数  $h: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  为光滑的。这时，可以采用一般的 VI 算法，如正则化间隙函数的最小化<sup>[15]</sup>或广义牛顿法。如果  $F(\cdot)$  是仿射的且函数  $h(\cdot)$  及  $g(\cdot)$  也是仿射的，则 VI 就称为仿射 VI，这时可采用标准旋转算法<sup>[16]</sup>。

2)  $K$  是一个广义盒：考虑  $K$  在  $\mathbb{R}^m = \{\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}\}^m$  中一个广义盒的情形，即：

$$K = \{\lambda \in \mathbb{R}^m, a_i \leq \lambda_i \leq b_i, a_i \in \mathbb{R}, b_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, m\} \quad (25)$$

这时，通过定义  $p = n + m + m + m$  和  $I = [0_n \ 0_m \ 0_m \ a]^T$  及  $u = [0_n \ 0_m \ 0_m \ b]^T$ ，可以将问题式(21)~(23)转化为一个 MCP。

广义盒的一个特例就是  $\mathbb{R}^m$  的正象限，即  $K = \mathbb{R}_+^m$ 。标准理论和大多数 LCP 的数值算法都适用于这种 MLCP 情形。

当电路简单且状态变量数目不大时，有时可以将 DAE 写成常微分方程(Ordinary Differential Equation, ODE)，并在式(20)中执行用  $y$  和  $\lambda$  显式替换  $X$ 。如果锥也是简单地由正象限定义，则可得到一个标准的 LCP。

## 2 仿真实验结果

为了验证本文提出的建模方法，采用目前最流行的 2 种电路仿真器 SPICE 和 ELDO 对 2 种典型的非光滑电路——开关电路和 Buck 变换器进行仿真实验。

### 2.1 仿真环境

在仿真器 SPICE 和 ELDO 中，首先根据网表自动生成所定义的全部器件，然后根据时间步进方案式(20)进行时间离散化，并在每个时间步构建包含问题式(23)的一个实例。主要采用 C++ 对每个电子器件建立式(20)的方程组和实例；仿真输出是一个包含 SPICE 和 ELDO 格式的电位和电流值的文件。

### 2.2 基本开关电路的仿真实验结果

本节对图 5 所示开关电路进行建模和仿真。

#### 2.2.1 动态方程

采用电路方程自动生成算法和前面的非光滑律得到开关电路的 9-维状态向量  $X = (V_1 \ V_2 \ V_3 \ V_4 \ I_L \ I_{03} \ I_{04} \ I_s \ I_d)$ 。电路中的两个非光滑器件是二极管和开关，对于非光滑器件上的输入/输出关系有：

$$\begin{cases} V_1(t) = \frac{1}{2} [\tau_1(t) - 1] R_{\text{off}} I_d(t) - \frac{1}{2} [\tau_1(t) + 1] R_{\text{on}} I_d(t) \\ V_1(t) - V_4(t) = \frac{1}{2} [1 + \tau_2(t)] R_{\text{off}} I_s(t) + \frac{1}{2} [1 - \tau_2(t)] R_{\text{on}} I_s(t) \end{cases} \quad (26)$$

最后，包含规则写为：

$$\begin{cases} V_1(t) \in -N_{[-1,1]} \tau_1(t) \\ 100[V_3(t) - V_2(t)] \in -N_{[-1,1]} \tau_2(t) \end{cases} \quad (27)$$

#### 2.2.2 采用 SPICE 的仿真结果

仿真时间步长设置为 0.1  $\mu\text{s}$ 。图 6(a) 所示为通过电感  $L$  的电流  $I_L$  以及  $R$  上的电压  $V_2$  变化过程。可以看到，当二极管和开关的状态在图中  $t = t_s$  发生变化时，采用本文的建模方法是收敛的并能计算正确的状态。

#### 2.2.3 采用 ELDO 的仿真结果

尽管 ELDO 不能提供非光滑开关模型，但选取合适的参数值，它仍能提供非光滑开关模型，实例中将  $V_{\text{off}}$  设置为 0，并选取较小的  $V_{\text{on}}$  值，时间步长仍设置为 0.1  $\mu\text{s}$ ，选取  $V_{\text{on}} = 1 \times 10^{-4} \text{ V}$ 、 $V_{\text{off}} = 0$ 、 $R_{\text{off}} = 1\ 000 \ \Omega$  和  $R_{\text{on}} = 0.001 \ \Omega$ 。图 6(b) 所示为采用 ELDO 的仿真结果，可以看到，非常接近 SPICE 的仿真结果，表明本文的建模方法是有效的和鲁棒的。

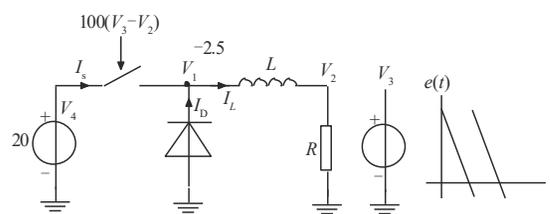


Fig.5 Example of switched circuit  
图 5 开关电路实例

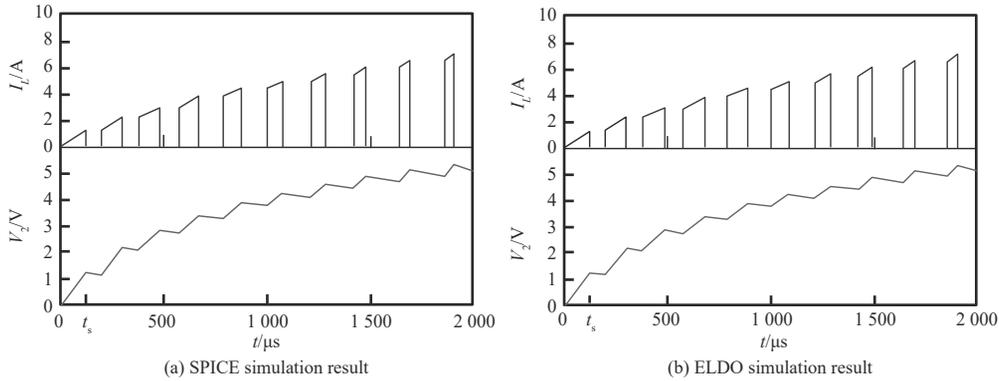


Fig.6 Switched circuit simulations  
图 6 开关电路的仿真

2.3 Buck 变换器的仿真实验结果

仿真的 Buck 变换器如图 7 所示。采用线性、分段线性和集值关系对变换器中的器件进行建模，以得到线性时不变互补系统的非光滑动态系统。

1) 功率 MOSFET pMOS/nMOS：将它们建模为具有理想特性的分段线性电流源  $I_{DS}=f(V_{GS}, V_{DS})$  和本征二极管 (DpMOS 和 DnMOS) 的组合，二极管残留电压为 1V。MOSFET 跨导  $K_p$  设置为  $10 \text{ A}\cdot\text{V}^{-1}$ ，pMOS 和 nMOS 的阈值电压分别为  $V_T=-2 \text{ V}$  和  $V_T=2 \text{ V}$ 。

分段线性模型采用 6 段，数据如下： $c_1=0.09, c_2=0.223 \ 8, c_3=0.466 \ 6, c_4=1.160 \ 5, c_5=2.886 \ 3, a_1=0, a_2=0.1, a_3=0.248 \ 7, a_4=0.618 \ 2, a_5=1.538 \ 3$ 。逻辑集成电路中的  $V_G$ 、 $V_S$ 、 $V_D$  和  $V_T$  值允许用  $f_{pwl}(\cdot)$  近似  $f(\cdot)$ 。

2) 补偿放大器：将其建模为一个增益为  $1\times 10^5$  和截止频率为 30 MHz 的输出低通滤波器。

3) 比较器：将其建模为一个分段线性函数，当  $x < -0.15 \text{ V}$  时其值为 0， $x > 0.15 \text{ V}$  时为 3。

4) 斜坡电压：频率为 600 kHz，范围在 0 和  $0.75V_1=2.25 \text{ V}$  之间。上升时间为 1.655 ns，下降时间为 10 ns。

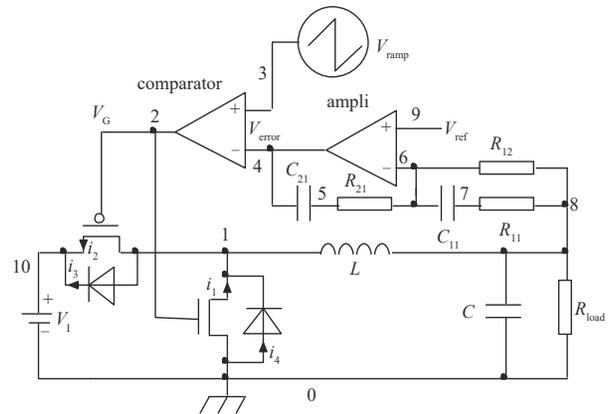


Fig.7 Buck converter  
图 7 Buck 变换器

2.3.1 采用 ELDO 的仿真结果

采用 ELDO 对变换器仿真时，初始条件是设置全部状态变量为零，时间步长采用 50 ps，然后计算  $4\times 10^6$  步得到 200 μs 长的稳定输出电压；在时钟频率为 3 GHz 的 Pentium 4 处理器上实现仿真所需要的 CPU 时间为 60 s。得到的结果如图 8 所示。图 8(a) 是跟踪斜坡  $V_{ref}$  的输出电压，图 8(b) 是通过电感器的电流  $I_L$ ， $I_L$  加载电容  $C$  持续 0.000 1 s，在 0.000 1 s 后， $I_L$  必须保持电容器电荷恒定，图 8(c) 是得到的 pMOS 漏极电压，图 8(d) 是得到的  $V_{error}$  和  $V_{ramp}$ 。这些结果表明了比较器输出到不饱和值的稳定，还表明了通过 pMOS 使  $V_{error}$  信号跟踪  $V_{ramp}$  信号的电流稳定性。

2.3.2 采用 SPICE 的仿真结果

仿真时采用 MOS Levl=3 模型，与 ELDO 仿真中采用的分段线性模型相比，该模型考虑了更多的物理效应，特别是与电压相关的电容，因为当节点 2 在  $V_1$  和地之间切换时，这些变化的电容会导致收敛问题；将比较器建模为一个非线性电压控制电压源  $V_{out}=1.5[\tanh(10V_{in})+1]$ ，这样，将作为非光滑模型的 3 段特性正则化有助于 SPICE 收敛；由于 ELDO 仿真是采用 50 ps 的固定时间步长进行的，因此仿真器必须采用这个值作为最大值，斜坡电压的上升时间增加到 3.2 ns。图 9 所示为采用 MOS Levl=3 模型的仿真结果。可以看到，比较器输出稳定在一个不饱和值。

3 结论

本文提出了一种采用标准数学规划问题的非光滑器件/电路的建模，并提出了一种适用的时间步进隐式算法来获得对非光滑电路的数值仿真。这种建模方法的优势在于：1) 避免了计算由于拓扑变化引起的动态性变化，

因为把电路视为一个具有固定状态维数的全局系统，模式转换通过互补问题求解来处理；2)可以建模和仿真具有大量事件的电路，而不会降低仿真速度；3)能准确计算系统的初始稳定状态；4)能精确仿真滑模轨迹。方法的主要缺点是阶次低，故在轨迹平滑部分的精确度可能较差，这将是未来研究的一个主要方向。

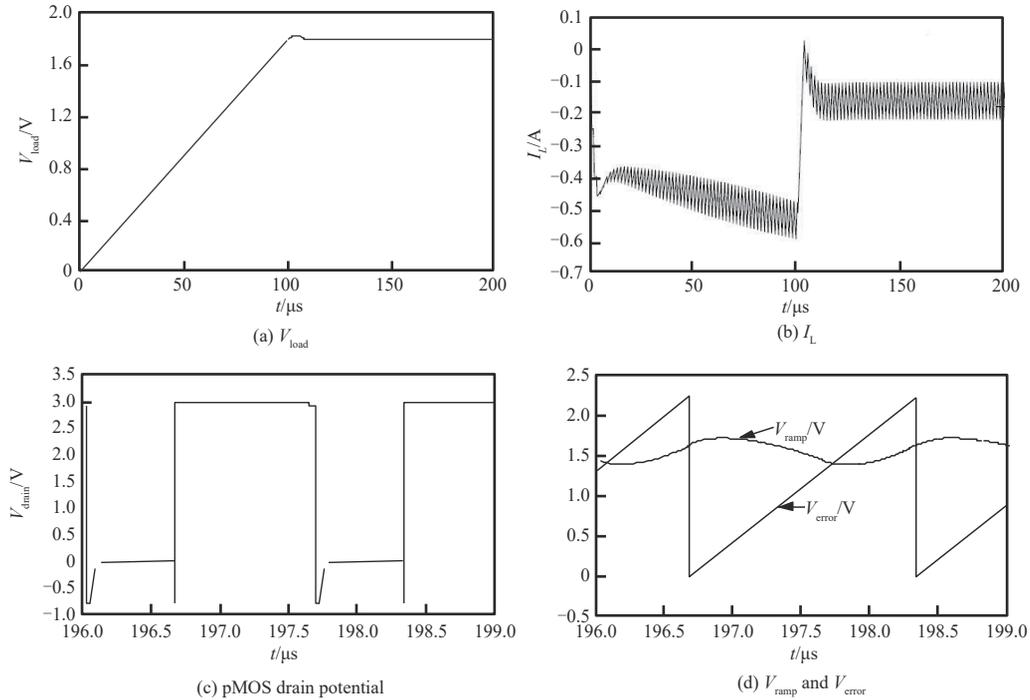


Fig.8 Buck converter simulations using ELDO

图8 采用ELDO的Buck变换器仿真

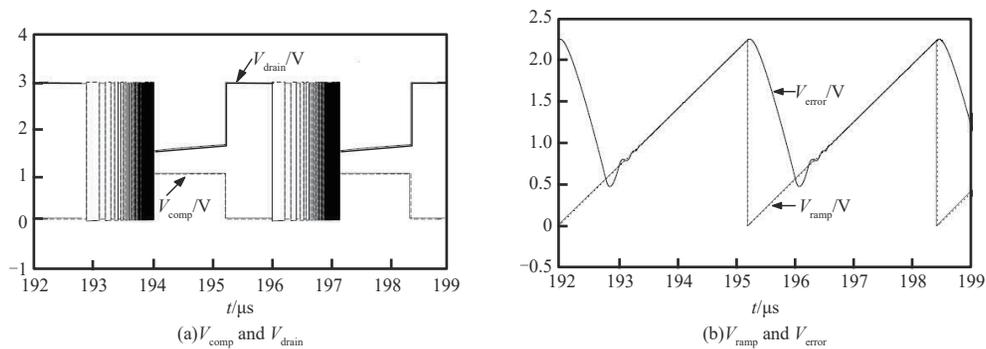


Fig.9 Simulations using MOS Level=3 model

图9 采用MOS Level=3模型的仿真结果

参考文献：

[ 1 ] 刘莹. MEMS 多域耦合非线性宏建模的轨迹分段线性化方法研究[D]. 西安:西北工业大学, 2015.(LIU Ying. Methods and applications of nonlinear model order reduction based on trajectory piecewise linearization for mutidomain coupling MEMS[D]. Xi'an,China:Northwestern Polytechnical University, 2015.)

[ 2 ] ZHAI J F,ZHANG L,YU Z Q,et al.A modified canonical Piecewise Linear function-based behavioral model for wideband power amplifiers[J]. IEEE Microwave and Wireless Components Letters, 2016,26(3):195-197.

[ 3 ] ZHANG Y,SANKARANARAYANAN S,SOMENZI F. Piecewise linear modeling of nonlinear devices for formal verification of analog circuits[C]// In Proceedings of Formal Methods in Computer-Aided Design. Cambridge, United Kingdom:[s. n.], 2014: 196-203.

[ 4 ] 张建刚. 分段线性LED驱动电路的设计[D]. 成都:电子科技大学, 2015. (ZHANG Jiangan. The design of Piecewise Linear LED driver[D]. Chengdu,China:University of Electronic Science and Technology of China, 2015.)

[ 5 ] YAMAMURA K,TAKAHARA H. Complete analysis of Piecewise Linear resistive circuits using integer programming[C]// In

- Proceedings of European Conference on Circuit Theory & Design. Catania,Italy:[s.n.], 2017:1–4.)
- [6] 赵花丽. 对称锥非线性互补问题的内点算法研究[D]. 西安:西安电子科技大学, 2018.(ZHAO Huali. Research on interior point method for symmetric cone nonlinear complementarity problem[D]. Xi'an,China:Xidian University, 2018.)
- [7] 卜登立. 混合 RM-DRM 逻辑及其在可逆电路综合中的应用[J]. 太赫兹科学与电子信息学报, 2019,17(6):1112–1117. (BU Dengli. Mixed RM-DRM logic and its application in reversible circuit synthesis[J]. Journal of Terahertz Science and Electronic Information Technology, 2019,17(6):1112–1117.)
- [8] IANNELLI L, MARIETHOZ S, VASCA F. New modeling and control challenges inspired by switched electronic systems: intriguing applications for averaging, model predictive control and complementarity[C]// In Proceedings of 2014 22nd Mediterranean Conference on Control and Automation. Palermo,Italy:[s.n.], 2014:670–673.
- [9] 孙影,齐凤河. 电流模式 Boost 变换器中非线性现象的研究[J]. 大庆师范学院学报, 2014,34(3):10–14. (SUN Ying,QI Fenghe. Research on nonlinear phenomenon in current mode Boost converter[J]. Journal of Daqing Normal University, 2014, 34(3): 10–14.)
- [10] ZHAO Y, HE X, HUANG T W, et al. Analog circuits for solving a class of variational inequality problems[J]. Neurocomputing, 2018(295):142–152.
- [11] 朱琳. 几类变分不等式和互补问题的光滑化算法研究[D]. 淮北:淮北师范大学, 2017. (ZHU Lin. Research on the smoothing method for several kinds of variational inequality and complementarity problems[D]. Huaibei,Anhui:Huaibei Normal University, 2017.)
- [12] 孙月. 求解随机线性对称锥互补问题的光滑化 SAA 方法[D]. 大连:辽宁师范大学, 2016. (SUN Yue. Convergence analysis of a smoothing SAA method for a stochastic linear symmetric complementarity problems[D]. Dalian, China: Liaoning Normal University,2016.)
- [13] GUTIERREZ A E R, MAZORCHE S R, HERSKOVITS J, et al. An interior point algorithm for mixed complementarity nonlinear problems[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2017,175(2):432–449.
- [14] GIANG D M, STRODIOT J J, NGUYEN V H. Strong convergence of an iterative method for solving the multiple-set split equality fixed point problem in a real Hilbert space[J]. Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas Fisicas y Naturales Serie A-Matematicas, 2016,111(4):1–16.
- [15] ABDI F, SHAKERI F. A new descent method for symmetric non-monotone variational inequalities with application to eigenvalue complementarity problems[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2017,173(3):923–940.
- [16] KIM Y, HUBER O, FERRIS M C. A structure-preserving pivotal method for affine variational inequalities[J]. Mathematical Programming, 2018,168(1,2):93–121.

#### 作者简介:

闫佩玉(1982-), 女, 硕士, 副教授, 主要研究方向为数学与应用数学 .email:ysslr49@163.com.

李琦(1981-), 女, 硕士, 副教授, 主要研究方向为应用数学.