

文章编号: 2095-4980(2024)05-0543-06

基于幅度比值和子空间的频率估计算法

鲁 航, 云 超, 蒋攀攀, 郝 亮

(63891 部队, 河南 郑州 471000)

摘 要: 为降低单频正弦复信号的频率估计误差, 针对传统 Rife 算法在较低信噪比条件下幅值最大和次大谱线判断错误问题, 利用 RootMUSIC 算法结果代替快速傅里叶变换(FFT)结果, 确定幅值最大和次大谱线序号; 同时针对 Rife 算法在部分频率区间估计误差较其他区间偏差大的问题, 采用频移重估思路, 进一步降低了整个频率估计区间的估计误差。仿真表明, 在较低信噪比条件下, 所提 RM-Rife 算法较 Rife 算法、Root MUSIC 算法和 M-Rife 算法, 具有更优的估计性能, 可用于相关工程实践中。

关键词: 频率估计; Rife 算法; RootMUSIC 算法; 均方根误差

中图分类号: TN927+.23

文献标志码: A

doi: 10.11805/TKYDA2022099

Frequency estimation algorithm based on amplitude ratio and subspace

LU Hang, YUN Chao, JIANG Panpan, HAO Liang

(Unit 63891 of PLA, Zhengzhou Henan 471000, China)

Abstract: In order to effectively reduce the frequency estimation error of single complex sinusoid, aiming at the estimation error of the traditional Rife algorithm caused by the judgment error of the maximum amplitude and sub maximum amplitude spectral line under the condition of low signal-to-noise ratio, replacing the Fast Fourier Transform(FFT) result with frequency estimation result of Root Multiple Signal Classification(RootMUSIC) algorithm is adopted to determine the maximum amplitude and sub maximum amplitude spectral line. In view of the problem that the estimation error of Rife algorithm in some frequency intervals is larger than that in other intervals, frequency shift and re-estimation method is employed to further reduce the estimation error in the whole frequency estimation range. Simulation results show that the proposed RootMUSIC-Modified-Rife(RM-Rife) algorithm has better estimation performance than Rife algorithm, RootMUSIC algorithm and Modified-Rife(M-Rife) algorithm under low SNR conditions, and can be applied to related engineering practice.

Keywords: frequency estimation; Rife algorithm; RootMUSIC algorithm; Root Mean Squared Error

噪声污染信号的频率估计问题广泛存在于通信、雷达、定位、语音识别等领域。针对频率估计问题, 国内外学者在时域、频域进行了大量研究, 提出包括幅度比值类算法^[1-7]、子空间类算法^[8]、自相关类算法^[9]等多类频率估计方法。其中幅度比值类算法因具有估计精确度高、计算量小等优势, 在工程实践中广泛应用。

幅度比值类算法是基于频域的频率估计算法, 通过信号频域谱线幅值的比值来估计信号频率。1970 年, Rife 和 Jane 提出利用信号离散傅里叶变换(Discrete Fourier Transform, DFT)结果的最大和次大谱线幅值比值来估计信号频率^[1], 该算法计算量小, 但只有信号频率位于特定频率区间时才具有较低的估计误差, 且该算法受噪声影响大。1997 年, Quinn 等提出相对于 Rife 算法, 只利用幅度比值的实部估计信号频率, 能有效消除插值方向错误的误差^[2]。文献[3-4]分别提出 Macleod 和 Candan 估计算法, 由于采用数学近似进行算法推导, 无法实现最优估计。文献[5]采用细化频谱技术, 利用快速傅里叶变换(FFT)幅度最大谱线与相邻两边谱线之间的频谱信息估计信号频率, 一定程度上减小了噪声的影响, 但该算法存在特定区间频率估计误差大的问题。文献[6]提出 M-Rife 算法, 采用“两步式”估计思路, 首先利用 FFT 计算得到信号幅度最大和次大谱线, 通过 2 条谱线比值估计信号频率作为粗估计结果, 再根据粗估计结果对信号进行频移和重估, 降低了整个频率区间的估计误差。仿真结果表明,

收稿日期: 2022-05-05; 修回日期: 2022-06-15

该算法较 Rife 算法, 在整个频率区间估计误差更小。文献[7]采用 M-Rife 思路, 通过改进频移判据和细化频谱技术, 提高频率估计精确度。以上 2 种算法解决了不同频率估计误差偏差大的问题, 但存在低信噪比时, 幅度最大、次大谱线误判带来的误差问题。

为进一步提高整个频率区间的频率估计精确度, 本文对 Rife 算法的估计误差进行分析和仿真验证, 并基于分析和仿真验证结果, 提出 RM-Rife 频率估计算法。算法用于单频正弦复信号的频率估计, 针对 Rife 算法存在的较低信噪比条件下, 幅值最大谱线判断错误和幅值次大谱线方向判断错误的问题, 结合 RootMUSIC 算法频率估计误差的分布特点, 利用 RootMUSIC 算法频率估计结果计算幅值最大谱线和次大谱线; 针对 Rife 算法存在非特定频率区间估计误差大的问题, 采用 M-Rife 思路进行频移后重估。仿真结果表明, 本文所提 RM-Rife 算法有效提升了较低信噪比条件下的频率估计性能。

1 频率估计模型及 Rife 估计算法

1.1 频率估计模型

考虑信号源为不含噪声的单频正弦复信号 $s(t)$:

$$s(t) = Ae^{j(2\pi ft + \varphi)} \quad (1)$$

式中 A 、 f 、 φ 分别为 $s(t)$ 的幅度、频率和初始相位。由于 $s(t)$ 在传输、接收和处理等过程中会引入噪声, 因此假设 $s(t)$ 经以上过程引入噪声后的信号为 $x(t)$ 。为便于之后分析, 对 $s(t)$ 以频率 f_s 进行采样, 并取长度为 N 的序列, $s(n)$ 表示为:

$$s(n) = Ae^{j(2\pi n f_s + \varphi)}, n = 1, 2, \dots, N \quad (2)$$

$s(n)$ 对应含噪信号序列为 $x(n)$, 本文估计模型即为根据含噪信号 $x(n)$ 估计信号 $s(n)$ 的频率 f 。

1.2 Rife 估计算法

对不含噪声的信号 $s(n)$ 进行分析, $s(n)$ 经 DFT 的 N 条离散谱线可表示为:

$$S(k) = A \times \frac{\sin(\pi(f/f_0 - k))}{\sin(\pi(f/f_0 - k)/N)} \times e^{j(\pi \frac{N-1}{N}(f/f_0 - k) + \varphi)}, k = 1, 2, \dots, N-1 \quad (3)$$

式中 f_0 为 DFT 的频谱分辨率, $f_0 = f_s/N$ 。由于 DFT 计算得到的是 N 条离散的谱线, 无法通过这 N 条谱线直接得到信号的准确频率。记 N 条谱线中幅值最大的谱线序号为 k^* , 此时 $s(n)$ 的频率可表示为:

$$f = f_0 \times (k^* + \delta) \quad (4)$$

式中 δ 为 $s(n)$ 真实频率与 DFT 最大谱线对应频率之间的差值, $|\delta| < 0.5$ 。此时 $s(n)$ 的频率估计问题转变为频差 δ 的估计问题。根据式(3)~(4), k^* 处谱线可表示为:

$$S(k^*) = \frac{\sin(\pi\delta)}{\sin(\pi\delta/N)} \times e^{j(\varphi + \pi \frac{N-1}{N}\delta)} \quad (5)$$

对于较大的 N , $S(k^*)$ 的幅值可近似表示为:

$$|S(k^*)| = \frac{\sin(\pi\delta)gN}{\pi\delta} \quad (6)$$

假设幅值次高的谱线序号为 $k^* + r$ ($r = \pm 1$), 次高谱线幅值可近似表示为:

$$|S(k^* + r)| = \frac{\sin(\pi(\delta + r))gN}{\pi(\delta + r)} \quad (7)$$

由式(6)和式(7)得到 δ 的表达式为:

$$\delta = \frac{|S(k^* + r)|}{|S(k^* + r)| + |S(k^*)|} \quad (8)$$

可得 Rife 算法在噪声条件下信号频率估计为:

$$\hat{f} = f_0 \times (k^* + \hat{\delta}) \quad (9)$$

式中 $\hat{\delta}$ 的估计式为：

$$\hat{\delta} = \frac{|X(k^* + r)|}{|X(k^* + r)| + |X(k^*)|}, r = \pm 1 \quad (10)$$

式中： $X(k)$ 为含噪信号 $x(n)$ 的 DFT； k^* 为 $X(k)$ 幅值最大谱线的序号； $k^* + r$ 为 $X(k)$ 幅值次大谱线的序号。实际应用中可利用 FFT 计算 $x(n)$ 的 DFT。

1.3 估计误差分析

Rife 算法为典型“两步式”估计算法，在较高信噪比条件下，Rife 算法估计精确度高，计算量小，但在较低信噪比条件下，估计误差较大，主要原因有：

1) 最大幅值谱线序号 k^* 和次大幅值谱线序号 $k^* + r$ 判断错误。出现该现象的原因是，噪声导致频域信号部分频率幅值变化较大，超过不含噪声信号的最大幅值谱线和次大幅值谱线的幅值；或不含噪声信号的最大幅值谱线和次大幅值谱线的幅值变小，低于其他频率的幅值。当信号真实频率靠近 FFT 两条谱线中间位置对应频率时，这两条谱线的幅值差异较小，更容易受噪声影响，出现最大幅值谱线序号 k^* 判断错误；当信号真实频率靠近 FFT 某条谱线对应频率时，该条谱线为最大幅值谱线，该条谱线两侧谱线的幅值差异较小，更容易受噪声影响，出现次大幅值谱线序号 $k^* + r$ 判断错误。

2) 在最大幅值谱线和次大幅值谱线判断无误时，文献[10]对 Rife 算法估计误差进行理论计算分析， δ 的估计均方误差如式(11)所示。式(11)表明，在不同频率处 Rife 算法理论估计误差不一样。总体表现为，当信号真实频率靠近 FFT 两条谱线中间位置对应频率(δ 趋近于 0.5)时，估计误差较小。

$$E_{\text{MS}}(\hat{\delta}) = \frac{(1 - |\delta|^2)((1 - |\delta|)^2 + \delta^2)}{N(R_{\text{SN}}) \sin^2(\delta)} \quad (11)$$

2 RM-Rife 频率估计算法

根据以上 Rife 算法估计误差分析的结论，提出 RM-Rife 频率估计算法。算法针对噪声导致最大、次大幅值谱线序号判断错误的问题，利用 RootMUSIC 算法^[8]进行频率初估计，并根据该估计结果确定最大幅值谱线序号 k^* 和次大幅值谱线序号 $k^* + r$ ，再利用幅度比值法进行估计。针对 Rife 算法在部分频率区间估计误差较大的问题，根据幅度比值法估计结果，将原信号频率移至 δ 趋近于 0.5 时，再对频移后的信号利用幅度比值法进行频率精确估计，实现整个频率估计区间估计精确度较高。RM-Rife 算法流程如下：

1) 对接收信号 $x(n)$ 利用长度为 M 的时窗进行延迟采样，得到 $X(n)$ ，再按式(13)求取 $X(n)$ 的协方差矩阵 R ：

$$X(n) = [x(n), x(n+1), \dots, x(n+M-1)]^T \quad (12)$$

$$R = E\{X(n)X^H(n)\} = AR_s A + \sigma_n^2 I \quad (13)$$

式中： R_s 为信号的协方差矩阵； σ_n^2 为噪声功率。

2) 对 R 进行特征值分解：

$$R = U \Sigma U^H = [U_s, U_n] \begin{bmatrix} \Sigma' & 0 \\ 0 & \sigma_n^2 I_{M-L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_s^H \\ U_n^H \end{bmatrix} \quad (14)$$

式中： Σ' 为包含了 L 个大特征值的对角矩阵； $\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma' & 0 \\ 0 & \sigma_n^2 I_{M-L} \end{bmatrix}$ ， 0 表示全零矩阵。其中 U_s 为信号子空间， U_n 为噪声子空间， U_s 与 U_n 正交。

3) 定义多项式 $f(z)$ ：

$$f(z) = p^H(z) U_n U_n^H p(z) = z^{M-1} p^T(z^{-1}) U_n U_n^H p(z) \quad (15)$$

式中 $p(z) = [1, z, z^2, \dots, z^{M-1}]^T$ 。对 $f(z)$ 求距离单位圆最近的根即为 RootMUSIC 算法估计的信号频率 $\hat{f}_m$ 。

- 4) 求取 $x(n)$ 的 FFT 频谱对应离散频率序列 $F = \{0 \ 1 \ \cdots \ N-1\} \times f_0$, $\text{Min}|F - \hat{f}_m|$ 对应的频率序号 k^* 即为最大幅值谱线序号, 根据 k^* 确定次大幅值谱线序号 $k^* + r$;
- 5) 利用 DFT 计算 k^* 和 $k^* + r$ 处的谱线幅值, 利用式(9)和式(10)估计信号频率 $\hat{f}_r$;
- 6) 根据估计频率 $\hat{f}_r$ 对 $X(k)$ 的 k^* 和 $k^* + r$ 处的谱线进行频移, 频移距离为 $f_d = (k^* + 0.5) \times f_0 - \hat{f}_r$, 得到频移后 k^* 和 $k^* + r$ 处谱线幅值 $X(k^*)$ 和 $X(k^* + r)$;
- 7) 再次利用式(9)和式(10)求取信号 $x(n)$ 的频率精确估计值 $\hat{f}$ 。

3 仿真

为验证本文所提 RM-Rife 算法的频率估计性能, 利用 Matlab 软件进行仿真验证。仿真中 $s(n)$ 为不含噪声的单频正弦复信号, $x(n)$ 为 $s(n)$ 的含噪信号, $x(n)$ 所加噪声为加性高斯白噪声复序列, 噪声方差为 $2\sigma^2$, 信噪比表示为:

$$R_{\text{SN}} = 10 \log \left(\frac{A^2}{2\sigma^2} \right) \quad (16)$$

3.1 Rife 算法的频率估计特性

为验证 Rife 算法的频率估计特性, 仿真设置 $s(n)$ 的幅值 $A = 1$ 、 $N = 256$ 、 $\varphi = \pi/3$ 、 $f_s = 8 \text{ Hz}$, $s(n)$ 的 FFT 分辨力为 $f_0 = f_s/N = 0.03125 \text{ Hz}$, $x(n)$ 的信噪比 $R_{\text{SN}} = 0 \text{ dB}$ 。选取宽度为 $3f_0$ 的频率区间进行仿真, 在该频率区间内均匀选择 600 个频率点, 每个频率点进行 300 次利用 Rife 算法估计 $x(n)$ 频率的蒙特卡罗实验, 计算每个频率点的估计结果均方根误差(RMSE), 仿真结果如图 1 所示。

图中利用虚线区分 3 个宽度为 f_0 的频率区间, 3 个频率区间内 Rife 算法频率估计结果表现为对频率 f 的周期特性(周期为 f_0)。可以观察到, 当真实频率趋近于每个频率区间中心 $2.5f_0$ 、 $3.5f_0$ 、 $4.5f_0$ 时, 对应于 $|\delta|$ 趋近于 0.5 时, Rife 算法的频率估计误差最小; 当真实频率趋近于 $2.15f_0$ 、 $3.15f_0$ 、 $4.15f_0$ 、 $2.85f_0$ 、 $3.85f_0$ 、 $4.85f_0$ 时, 对应于 $|\delta|$ 趋近于 0.15 时, 估计频率误差最大; 当真实频率趋近于整数倍 f_0 时, 对应于 $|\delta|$ 趋近于 0 时, 估计误差大于 $|\delta|$ 趋近于 0.5 时的估计误差。

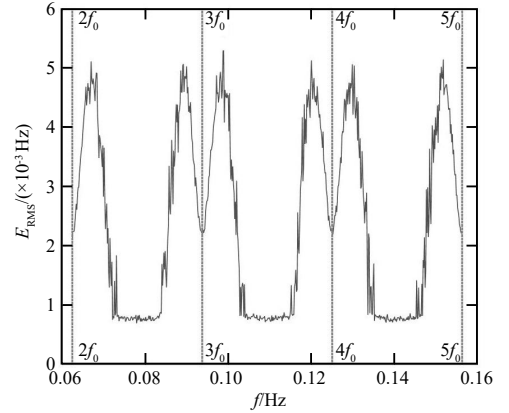


Fig.1 Estimation result of 0.06~0.16 Hz signal by Rife algorithm

图 1 Rife 算法 0.06~0.16 Hz 频率估计结果

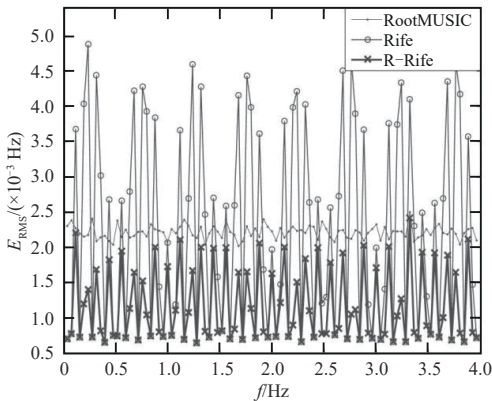


Fig.2 Estimation results of 0 dB signal by three algorithms

图 2 信噪比为 0 dB 时, 3 种算法频率估计结果

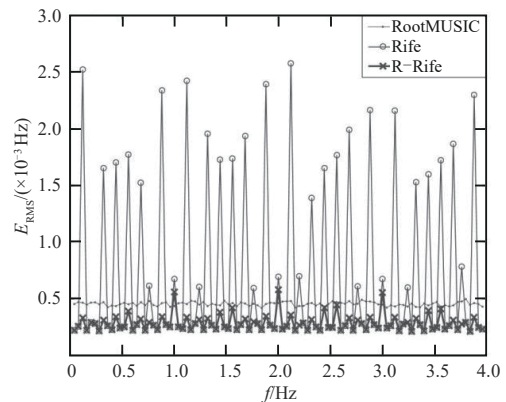


Fig.3 Estimation results of 10 dB signal by three algorithms

图 3 信噪比为 10 dB 时, 3 种算法频率估计结果

3.2 Rife 算法、RootMUSIC 算法和 R-Rife 算法(RM-Rife 算法未经频移重估)的频率估计性能

通过仿真验证利用 RootMUSIC 算法替代 FFT 计算 $x(n)$ 最大和次大幅值谱线序号并进行频率估计的有效性。 $s(n)$ 仿真参数设置与 3.1 节一致, RootMUSIC 算法的时延窗口长度为 $M = 17$, $s(n)$ 频率设置为在 $(0, f_s/2)$ 范围内均匀取 99

个频率点，每个频率点进行300次分别利用Rife算法、RootMUSIC算法和R-Rife算法估计 $x(n)$ 频率的蒙特卡罗实验，计算每个频率点每种算法估计结果的RMSE。 $R_{SN}=0\text{ dB}$ 和 $R_{SN}=10\text{ dB}$ 条件下的仿真结果如图2和图3所示。

从图中可以看出，RootMUSIC算法在整个频率范围内估计误差起伏最小且与信号真实频率无关；Rife算法频率估计误差起伏最大。结合图1分析，Rife算法的频率估计误差与信号频率紧密相关；R-Rife算法的频率估计误差在 $(0, f_s/2)$ 范围内均不大于RootMUSIC算法和Rife算法，这是由于RootMUSIC算法频率估计误差小于直接对信号进行FFT取最大幅值谱线对应频率的估计误差，利用RootMUSIC算法的频率估计结果替代FFT结果计算最大和次大幅值谱线序号，可以有效减小最大幅值谱线和次大幅值谱线序号判断错误导致的误差。图2和图3表明，在较低信噪比条件下，R-Rife算法较Rife算法和RootMUSIC算法估计误差更低。

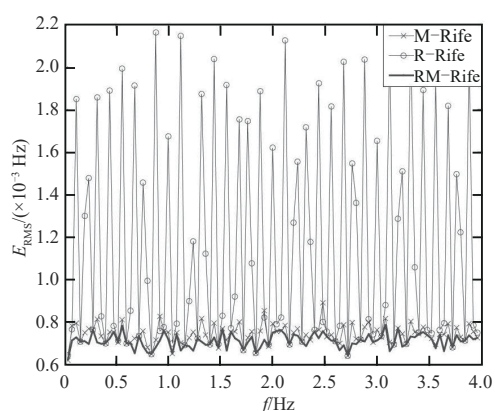


Fig.4 Estimation results of 0 dB signal by three algorithms
图4 信噪比为0 dB时,3种算法频率估计结果

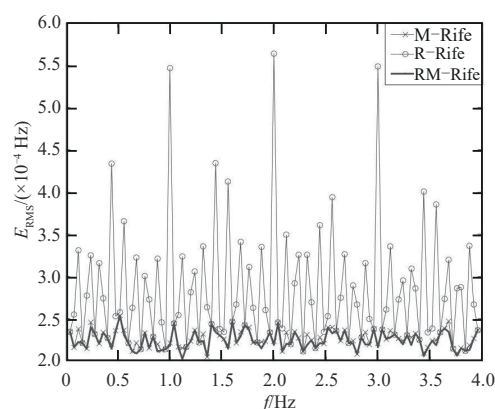


Fig.5 Estimation results of 10 dB signal by three algorithms
图5 信噪比为10 dB时,3种算法频率估计结果

3.3 M-Rife算法、R-Rife算法和RM-Rife算法仿真性能对比

通过仿真验证本文所提RM-Rife算法相对于M-Rife算法、R-Rife算法的频率估计性能，仿真参数设置与3.1节一致，仿真结果如图4和图5所示。

从图4和图5中可以看出，所提RM-Rife算法相比于R-Rife算法，通过对信号进行频移和重估，在整个频率估计范围内均具有较好的估计性能，特别是在R-Rife算法估计误差较大的频率点同样具有较低的估计误差。RM-Rife算法相比于M-Rife算法，通过利用RootMUSIC算法的频率估计结果代替FFT结果求取幅值最大和次大谱线序号，在M-Rife算法频率估计误差已经很小的基础上进一步降低了频率估计误差。对比图4和图5可以看到，在信噪比为10 dB条件下，相对于R-Rife算法，RM-Rife算法在整个频率估计范围内有较大的优势，表现在R-Rife算法估计误差波动较大的频率点，RM-Rife算法仍能取得较小的频率估计误差；相对于M-Rife算法，RM-Rife算法在信噪比为10 dB时仍具有一定的优势，表现在多个频点上频率估计误差更小，但相比于信噪比为0 dB时，能明显看到其优势已经变小，表现在99个仿真频点中有估计误差优势的频点个数变少。出现此变化的原因是，在高信噪比条件下，噪声导致根据FFT结果确定幅值最大和次大谱线序号错误的概率降低，因此M-Rife算法中根据FFT结果确定的幅值最大和次大谱线序号和RM-Rife算法中利用RootMUSIC算法确定的幅值最大和次大谱线序号结果大概率一致。结合以上分析可进一步判断，在高信噪比条件下，本文提出的RM-Rife算法的估计性能与M-Rife算法估计性能趋于一致。

4 结论

通过在频率估计区间对所提RM-Rife算法与Rife算法、RootMUSIC算法、M-Rife算法的频率估计性能进行仿真，可以得出，在较低信噪比条件下，利用RootMUSIC算法估计结果替代FFT计算信号幅值最大和次大离散谱线序号，能有效降低噪声导致的估计误差；采用信号频移重估思路，能进一步降低部分频率区间的频率估计误差，RM-Rife算法的频率估计RMSE小于Rife算法、RootMUSIC算法、M-Rife算法。

所提RM-Rife算法需利用RootMUSIC算法的估计结果确定信号最大和次大幅值谱线序号，在更低信噪比条件(小于0 dB)下，由于RootMUSIC算法估计误差迅速增大，导致RM-Rife算法估计性能可能会劣于部分对比算法。

参考文献:

- [1] RIFE D C, VINCENT G A. Use of the discrete Fourier transform in the measurement of frequencies and levels of tones[J]. The Bell System Technical Journal, 1970,49(2):197–228. doi:10.1002/j.1538-7305.1970.tb01766.x.
- [2] QUINN B G. Estimation of frequency, amplitude, and phase from the DFT of a time series[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1997,45(3):814–817. doi:10.1109/78.558515.
- [3] MACLEOD M D. Fast nearly ML estimation of the parameters of real or complex single tones or resolved multiple tones[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1998,46(1):141–148. doi:10.1109/78.651200.
- [4] CANDAN C. A method for fine resolution frequency estimation from three DFT samples[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2011,18(6):351–354. doi:10.1109/LSP.2011.2136378.
- [5] LIANG Xiaohu, LIU Aijun, PAN Xiaofei, et al. A new and accurate estimator with analytical expression for frequency estimation[J]. IEEE Communications Letters, 2016,20(1):105–108. doi:10.1109/LCOMM.2015.2496149.
- [6] 邓振森, 刘渝, 王志忠. 正弦波频率估计的修正 Rife 算法[J]. 数据采集与处理, 2006,21(4):473–477. (DENG Zhenmiao, LIU Yu, WANG Zhizhong. Modified Rife algorithm for frequency estimation of sinusoid wave[J]. Journal of Data Acquisition & Processing, 2006,21(4):473–477.) doi:10.3969/j.issn.1004-9037.2006.04.020.
- [7] 王宏伟, 赵国庆. 正弦波频率估计的改进 Rife 算法[J]. 信号处理, 2010,26(10):1573–1576. (WANG Hongwei, ZHAO Guoqing. Improved Rife algorithm for frequency estimation of sinusoid wave[J]. Signal Processing, 2010,26(10):1573–1576.) doi:10.3969/j.issn.1003-0530.2010.10.022.
- [8] 刘秋晨. 基于多项式求根的高效波达角度估计算法研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2017. (LIU Qiuchen. Research on efficient direction-of-arrival estimation algorithm based on polynomial rooting[D]. Harbin, China: Harbin Institute of Technology, 2017.) doi:10.7666/d.D01332802.
- [9] 田甜, 朱立东. 基于导频辅助的 DFT 时变频率捕获算法[J]. 太赫兹科学与电子信息学报, 2019,17(6):1091–1097. (TIAN Tian, ZHU Lidong. Pilot-aided DFT time-varying frequency acquisition algorithm[J]. Journal of Terahertz Science and Electronic Information Technology, 2019,17(6):1091–1097.) doi:10.11805/TKYDA201906.1091.
- [10] 齐国清, 贾欣乐. 插值 FFT 估计正弦信号频率的精度分析[J]. 电子学报, 2004,32(4):625–629. (QI Guoqing, JIA Xinle. Accuracy analysis of frequency estimation of sinusoid based on interpolated FFT[J]. Acta Electronica Sinica, 2004,32(4):625–629.) doi:10.3321/j.issn:0372-2112.2004.04.022.

作者简介:

鲁 航(1993–), 男, 硕士, 助理工程师, 主要研究方向为通信及信息系统. email:luh2020@qq.com.

蒋攀攀(1989–), 男, 硕士, 工程师, 主要研究方向为通信及通信对抗.

云 超(1983–), 男, 博士, 工程师, 主要研究方向为通信与通信对抗.

郝 亮(1985–), 男, 博士, 工程师, 主要研究方向为通信与信息系统.