文章编号：2095-4980(2026)01-0080-09

广义阵列流形模型下相干分布式信源的降维PM角估计算法

董成武[1]，牛　芳[1]，夭小丽[1]，李　璇[1]，夏林伟[1]，李嘉琪[2]

(1.国网甘肃省电力公司 定西供电公司，甘肃 定西 744300；2.南京航空航天大学 电子信息工程学院，江苏 南京 211106)

摘　要：提出一种对相干分布式信源进行中心波达角估计的降维传播算子(PM)算法。基于广义阵列流形模型，中心波达角可从原始阵列流形中分离，实现与角度扩展的解耦。为避免对采样协方差矩阵进行特征值分解，计算广义阵列导向矢量正交空间中的传播算子矩阵以构造目标函数。本算法在引入降维技术后，只需要进行一维谱峰搜索，便可确定信源的中心波达角，大幅降低了计算复杂度。另外，本文还详细推导了该场景下的克拉美罗下界，为算法估计性能提供基准。性能分析和数值仿真结果表明，所提算法在降低复杂度的同时，仍能保持优良的角度估计性能。

关键词：波达方向估计；相干分布式信源；降维传播算子；广义阵列流形；克拉美罗下界

中图分类号：TN911.72　　**文献标志码：**A　　**DOI：**10.11805/TKYDA2024597

A reduced-dimensional PM angular estimation algorithm for coherently distributed sources via generalized array manifold model

DONG Chengwu[1]，NIU Fang[1]，YAO Xiaoli[1]，LI Xuan[1]，XIA Linwei[1]，LI Jiaqi[2]

(1.Dingxi Power Supply Company，State Grid Gansu Electric Power Company，Dingxi Gansu 744300，China；2.College of Electronic and Information Engineering，Nanjing University of Aeronautics and Astronautics，Nanjing Jiangshu 211106，China)

Abstract: A reduced-dimension Propagation Method(PM) based algorithm is proposed for central Direction-Of-Arrival(DOA) estimation of coherent distributed sources. Based on the Generalized Array Manifold(GAM) model, the central DOA can be decoupled from the original array manifold, achieving separation from the angular spread. To avoid eigenvalue decomposition of the sample covariance matrix, a propagation operator matrix is computed in the orthogonal space of the generalized array steering vectors to construct the objective function. With the introduced dimensionality reduction technique, the proposed algorithm only requires a one-dimensional spectral peak search to determine the central DOA of the sources, which significantly reduces the computational complexity. Additionally, the Cramér-Rao lower Bound(CRB) for this scenario is derived in detail to provide a benchmark for the estimation performance of the algorithm. Performance analysis and numerical simulation results demonstrate that the proposed algorithm maintains excellent angle estimation performance while reducing complexity.

Keywords: Direction Of Arrival(DOA) estimation; Coherently Distributed(CD) sources; reduced-dimension Propagator based Method(PM); Generalized Array Manifold(GAM); Cramér-Rao lower Bound

波达方向估计(DOA)在数十年间受到来自雷达、车辆定位和无线通信等领域学者们的广泛关注[1-3]，但在一些多径场景下如密集城区和宏蜂窝小区，或在不均匀传播介质影响下[4]，信源发射的信号总会经过多次反射或散射后才入射到接收阵列上，使观测信号由一定角度扩展范围内的多径分量叠加而成。此时基于传统点信源的DOA估计算法测向性能会严重下降甚至失效，相比之下，分布式信源定位模型会更加准确。按照同一信源下形成的多径分量之间的相关程度，分布式信源主要可分为相干分布式(CD)信源、非相干分布式(Incoherently

收稿日期：2024-11-15；**修回日期：**2025-01-01

引用格式：董成武,牛芳,夭小丽,等. 广义阵列流形模型下相干分布式信源的降维PM角估计算法[J]. 太赫兹科学与电子信息学报, 2026,24(1): 80-88. DOI:10.11805/TKYDA2024597.

Citation format: DONG Chengwu,NIU Fang,YAO Xiaoli,et al. A reduced-dimensional PM angular estimation algorithm for coherently distributed sources via generalized array manifold model[J]. Journal of Terahertz Science and Elcetronic Information Technology, 2026, 24(1): 80-88. DOI:10.11805/TKYDA2024597.

Distributed，ID)信源以及部分相干分布式信源3大类[5]。

对于相干分布式信源，其信号的多径分量之间是完全相关的，区别仅在于存在一定的时延和振幅变化[6]，更适用于一些慢时变信道场景下的信源建模[7]。近些年，相关学者针对CD信源DOA估计开展了一系列工作。Valaee等[6]首次引入了分布式信源这一概念，并提出基于子空间正交的相干分布式信源参数估计算法(Distributed Source Parameter Estimator，DSPE)；随后，一些基于点信源模型的估计算子，如Capon[8]、传播算子(PM)[9]都被改进为适用于CD信源的估计器。但这类算法均需同时对波达角和角度扩展进行二维搜索，计算复杂度过高，导致硬件计算成本过高。为规避角度扩展参数维度的搜索，Shahbazpanahi等[10]提出一种基于移不变性阵列的低复杂度算法——ESPRIT(Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Technique)–CD，该算法利用其特殊阵列结构及中心矩，可分别得到中心波达角和角度扩展的闭式解。另外，在此基础上，还可通过计算传播算子替代特征值分解后的噪声子空间，得到复杂度相当且同样具备闭式解的PM–CD算法[11]。即便具备低复杂度优势，这两种算法仍存在依赖于两组带小位移的均匀子阵所维持的移不变特性的局限性。

文献[12]利用一阶泰勒展开对原有空间特征向量中的中心波达角和角度扩展参数进行解耦，建立广义阵列流形(GAM)近似模型；并利用该模型，在均匀阵列下基于Vandermonde结构提出了改进型的子空间正交和ESPRIT算法。该作者随后在文献[13]中忽略有限快拍和校准误差而只考虑本地散射的影响，推导出MUSIC(MUltiple SIgnal Classification)算法估计性能的渐近分布形式，并得出本地散射对慢时变信道具有较大影响的结论。由于GAM近似模型具有将中心波达角从原始阵列流形中解耦出来的优势，无需角分布函数先验知识，因此在其他场景下也具有良好应用。基于GAM模型的广义ESPRIT算法可应用到任意线阵，解决了ID信源场景下ESPRIT算法依赖于特殊阵型的问题，并且只需进行一维谱峰搜索即可估计出中心波达角[14]。文献[15]在此基础上提出了一种两步式降秩估计算法，可有效估计出混合近远场ID信源下的中心波达角。此外，在直接定位技术中，文献[16]通过GAM模型构造降维MUSIC代价函数，避免了对扩展半径维度进行估计，有效降低了计算复杂度。实验结果表明其定位性能要优于两步定位法，尤其是在低信噪比下。

借助GAM近似模型，本文提出一种降维传播算子相干分布式信源角估计算法(Propagator based Method via Generalized Array Manifold，PM–GAM)。首先建立GAM近似模型；其次计算与噪声子空间处于同一空间下的传播算子矩阵，避免对采样协方差矩阵进行特征值分解；然后利用传播算子矩阵与广义阵列导向矢量的正交性得到基础代价函数；最后利用降维技术构造出只需一维搜索便可以估计出中心波达角的代价函数。

1　信号模型

1.1　相干分布式信源场景

考虑如图1所示的多相干分布式信源测向场景。假设有Q个中心波达角和角度扩展分别为$\{\theta_q\}_{q=1}^{Q}$和$\{\Delta_q\}_{q=1}^{Q}$的远场CD信源，各自发射的窄带信号$\{s_q(t)\}_{q=1}^{Q}$经过散射或反射后形成一簇数目有$\{N_q\}_{q=1}^{Q}$的多径分量的叠加信号，被装载有M个全向阵元的均匀线性阵(Uniform Linear Array，ULA)所接收。这样阵列接收到的信号可以表示为[12]：

$$\boldsymbol{x}(t)=\sum_{q=1}^{Q}\sum_{k=1}^{N_q}\beta_{qk}\boldsymbol{a}(\theta_q+\tilde{\theta}_{qk})s_q(t-\tau_{qk})+\boldsymbol{n}(t) \tag{1}$$

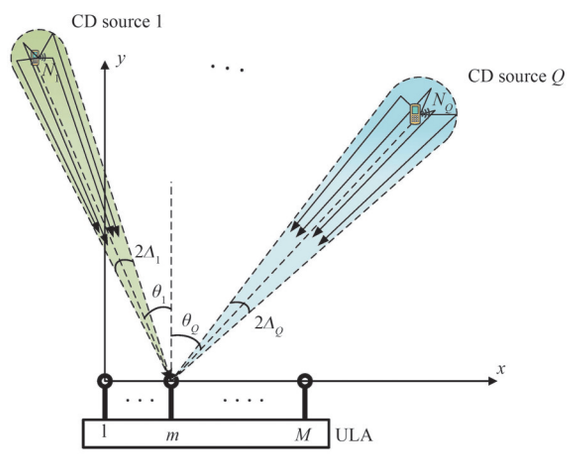

Fig.1 Illustration of coherently distributed sources scenario

图1　相干分布式信源测向场景图

式中：β_{qk}、$\theta_q+\tilde{\theta}_{qk}$、$\tau_{qk}$分别为第$q$个信源经散射或反射后形成的第$k$个多径分量的复衰落系数、来波方向、时延；阵列导向矢量$\boldsymbol{a}(\theta_q+\tilde{\theta}_{qk})\in\mathbb{C}^{M\times 1}$的第$m$个元素为$\left[\boldsymbol{a}(\theta)\right]_m=M^{-0.5}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi(m-1)d\sin(\theta_q+\tilde{\theta}_{qk})/\lambda}$，其中$d$和$\lambda$分别表示阵元间距和载波波长；$\boldsymbol{n}(t)$为服从复高斯分布$\mathcal{CN}(0,\sigma_n^2\boldsymbol{I}_M)$的加性白噪声。

根据窄带信号的假设条件，可得$s_q(t-\tau_{qk})\approx s_q(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f_c\tau_{qk}}$[17]，其中$f_c$为载波频率。将此结论代入式(1)中，有：

$$\boldsymbol{x}(t)=\sum_{q=1}^{Q}s_q(t)\sum_{k=1}^{N_q}\beta_{qk}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f_c\tau_{qk}}\boldsymbol{a}(\theta_q+\tilde{\theta}_{qk})+\boldsymbol{n}(t)=\sum_{q=1}^{Q}s_q(t)\sum_{k=1}^{N_q}\alpha_{qk}\boldsymbol{a}(\theta_q+\tilde{\theta}_{qk})+\boldsymbol{n}(t) \tag{2}$$

式中$\alpha_{qk}=\beta_{qk}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f_c\tau_{qk}}$，写成这种形式是因为独立时延相位项与复衰落系数会产生模糊，只能将相位项看成复衰落系数的一部分[18]。

进一步地，定义：

$$\bar{\boldsymbol{a}}_q \triangleq \sum_{k=1}^{N_q} \alpha_{qk} \boldsymbol{a}(\theta_q + \tilde{\theta}_{qk}) \tag{3}$$

为空间特征向量，则接收信号$\boldsymbol{x}(t)$可以简化为：

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{s}(t) + \boldsymbol{n}(t) \tag{4}$$

式中：空间特征矩阵$\boldsymbol{A} = [\bar{\boldsymbol{a}}_1, \bar{\boldsymbol{a}}_2, \cdots, \bar{\boldsymbol{a}}_Q] \in \mathbb{C}^{M \times Q}$；信号矢量$\boldsymbol{s}(t) = [s_1(t), s_2(t), \cdots, s_Q(t)]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{C}^{Q \times 1}$。需要说明的是，空间特征矩阵$\boldsymbol{A}$是由$Q$个信源的全部多径分量$\sum_{q=1}^{Q} N_q$的到达角和衰落系数所决定的。确定全部多径的到达角和衰落系数往往是具有挑战性的，特别是在多径数目很大的情况下，依赖这种方法来确定空间特征矩阵$\boldsymbol{A}$是不切实际的[13]。

1.2 广义阵列流形模型

广义阵列流形模型可以很好地解决上述问题。假设角度扩展相对较小，对式(3)进行一阶泰勒展开[16]，可得

$$\boldsymbol{b}_q \simeq \sum_{k=1}^{N_q} \alpha_{qk} \left[\boldsymbol{a}\left(\theta_q\right) + \tilde{\theta}_{qk} \boldsymbol{d}\left(\theta_q\right) \right] = \left(\sum_{k=1}^{N_q} \alpha_{qk} \right) \boldsymbol{a}\left(\theta_q\right) + \left(\sum_{k=1}^{N_q} \alpha_{qk} \tilde{\theta}_{qk} \right) \boldsymbol{d}\left(\theta_q\right) = \boldsymbol{a}\left(\theta_q\right) + \varphi_q \boldsymbol{d}\left(\theta_q\right) = \boldsymbol{K}\left(\theta_q\right) \boldsymbol{e}\left(\varphi_q\right) \tag{5}$$

式中：$\boldsymbol{d}(\theta_q) = \partial \boldsymbol{a}(\theta_q) / \partial \theta_q$；$\boldsymbol{K}(\theta_q) = \left[\boldsymbol{a}(\theta_q), \boldsymbol{d}(\theta_q) \right] \in \mathbb{C}^{M \times 2}$；$\boldsymbol{e}(\varphi_q) = [1, \varphi_q]^{\mathrm{T}}$。定义：

$$\varphi_q = \sum_{k=1}^{N_q} \alpha_{qk} \tilde{\theta}_{qk} \tag{6}$$

为散射系数[12]，用来替代角度扩展Δ_q表征角度扩散的特性。式(5)的成立条件是保证$\sum_{k=1}^{N_q} \alpha_{qk} = 1$。

从式(5)不难看出，中心波达角在新的空间特征向量$\boldsymbol{b}_q$中实现了解耦，并且只需要确定Q个散射系数和中心波达角即可以确定近似空间特征向量。将此时的

$$\boldsymbol{B}(\theta, \phi) = \boldsymbol{A}(\theta) + \boldsymbol{D}(\theta) \boldsymbol{\Phi}(\varphi) \tag{7}$$

定义为广义阵列流形[12]，其中：

$$\begin{cases} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\theta}) = \left[\boldsymbol{a}(\theta_1), \boldsymbol{a}(\theta_2), \cdots, \boldsymbol{a}(\theta_Q) \right] \\ \boldsymbol{D}(\boldsymbol{\theta}) = \left[\boldsymbol{d}(\theta_1), \boldsymbol{d}(\theta_2), \cdots, \boldsymbol{d}(\theta_Q) \right] \\ \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\varphi}) = \mathrm{diag}\{\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_Q\} \end{cases} \tag{8}$$

因此当阵列接收L个采样快拍后，基于GAM模型下的接收信号表示为[15]：

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\varphi}) \boldsymbol{S} + \boldsymbol{N} \tag{9}$$

式中：

$$\begin{cases} \boldsymbol{X} = [\boldsymbol{x}(1), \boldsymbol{x}(2), \cdots, \boldsymbol{x}(L)] \in \mathbb{C}^{M \times L} \\ \boldsymbol{S} = [\boldsymbol{s}(1), \boldsymbol{s}(2), \cdots, \boldsymbol{s}(L)] \in \mathbb{C}^{Q \times L} \\ \boldsymbol{N} = [\boldsymbol{n}(1), \boldsymbol{n}(2), \cdots, \boldsymbol{n}(L)] \end{cases} \tag{10}$$

其期望协方差矩阵为：

$$\boldsymbol{R} = E\left[\boldsymbol{x}(l) \boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}(l) \right] = \boldsymbol{B} E\left[\boldsymbol{s}(l) \boldsymbol{s}^{\mathrm{H}}(l) \right] \boldsymbol{B}^{\mathrm{H}} + \sigma_n^2 \boldsymbol{I}_M = \boldsymbol{B} \boldsymbol{\Gamma} \boldsymbol{B}^{\mathrm{H}} + \sigma_n^2 \boldsymbol{I}_M \tag{11}$$

式中$\boldsymbol{\Gamma} = \mathrm{diag}\{\sigma_{s1}^2, \sigma_{s2}^2, \cdots, \sigma_{sQ}^2\}$，其中$\sigma_{sq}^2$为第$q$个信源发射信号的信号功率。但在实际接收时，往往只能采样到有限L个快拍，因此得到的是采样协方差矩阵：

$$\hat{\boldsymbol{R}} = \frac{1}{L} \boldsymbol{X} \boldsymbol{X}^{\mathrm{H}} \tag{12}$$

虽然散射系数在移动通信中也很重要，但大多数情况下只需估计每个CD信源的中心波达角[19]。因此本文的问题总结如下：给定接收信号$\boldsymbol{X}$或采样协方差矩阵$\hat{\boldsymbol{R}}$，基于广义阵列流形模型式(7)来估计出未知的中心波达角$\{\hat{\theta}_q\}_{q=1}^{Q}$。

2 中心波达角估计算法

2.1 基于GAM模型的传播算子算法

假设$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\varphi})$满秩，其$Q$行是线性独立的，剩余$(M-Q)$行可由该$Q$行线性表示。因此，将GAM分块为[11]：

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\varphi})=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_1\\ \boldsymbol{B}_2\end{bmatrix} \tag{13}$$

式中：$\boldsymbol{B}_1$和$\boldsymbol{B}_2$分别是广义阵列流形$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\varphi})$的前$Q$行和后$(M-Q)$行元素所组成的矩阵，并假设$\boldsymbol{B}_1\in\mathbb{C}^{M\times Q}$非奇异。定义如下$P$算子[20]：

$$\begin{aligned}&P:\mathbb{C}^{Q\times Q}\to\mathbb{C}^{(M-Q)\times Q}\\&\boldsymbol{B}_1\mapsto P(\boldsymbol{B}_1)\triangleq\boldsymbol{P}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{B}_2\end{aligned} \tag{14}$$

为传播算子，$\boldsymbol{P}\in\mathbb{C}^{(M-Q)\times Q}$为传播算子$P$线性映射下的传播算子矩阵。进而有：

$$\boldsymbol{T}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\phi})=\boldsymbol{O} \tag{15}$$

成立，式中$\boldsymbol{O}$代表零空间，其中：

$$\boldsymbol{T}\triangleq[\boldsymbol{P}^{\mathrm{H}},-\boldsymbol{I}_{M-Q}]^{\mathrm{H}}\in\mathbb{C}^{M\times(M-Q)} \tag{16}$$

式(15)说明了$\boldsymbol{T}$与DOA真值下的广义导向矢量$\boldsymbol{b}_q,q=1,2,\cdots,Q$都正交，这意味着$\mathrm{span}\{\boldsymbol{T}\}\subseteq\mathrm{span}\{\boldsymbol{E}_{\mathrm{n}}\}$，其中$\boldsymbol{E}_{\mathrm{n}}$代表期望协方差矩阵对应下的噪声子空间。因为从式(16)分析$\boldsymbol{T}$只有$(M-Q)$个列向量线性不相关[21]，说明

$$\mathrm{span}\{\boldsymbol{T}\}=\mathrm{span}\{\boldsymbol{E}_{\mathrm{n}}\} \tag{17}$$

实际上，通过采样协方差得到的噪声子空间估计值为$\hat{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{n}}$，这样在真实DOA处$\left\|\boldsymbol{T}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{b}_q\right\|^2$的值并不为零，而是一个接近于零的极小值。这样，可以构造如下代价函数：

$$f_{\mathrm{PM}}(\theta,\varphi)=\frac{1}{\left\|\boldsymbol{T}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{b}_q\right\|^2} \tag{18}$$

对其进行二维搜索，即：

$$\hat{\theta},\hat{\varphi}=\arg\max_{\theta,\varphi}f_{\mathrm{PM}}(\theta,\varphi) \tag{19}$$

寻找到前Q个最大谱峰，其对应位置的角度就包含所需估计的中心波达角。

对于传播算子矩阵$\boldsymbol{P}$，利用采样协方差进行估计，将采样协方差分块为[20]：

$$\hat{\boldsymbol{R}}=[\boldsymbol{G},\boldsymbol{H}] \tag{20}$$

式中：$\boldsymbol{G}$为$\hat{\boldsymbol{R}}$的前Q列；$\boldsymbol{H}$则为其后$(M-Q)$列。采用最小二乘法得到矩阵$\boldsymbol{P}$的估计值为：

$$\hat{\boldsymbol{P}}=\boldsymbol{G}^{+}\boldsymbol{H} \tag{21}$$

2.2 降维PM–GAM算法

为避免对散射系数维度进行搜索，采用降维思想降低算法的复杂度，提出了基于GAM模型的降维PM算法。首先，由式(5)的最后一个等式可以重写式(18)为：

$$f_{\mathrm{PM}}(\theta,\varphi)=\frac{1}{\boldsymbol{e}^{\mathrm{H}}(\varphi)\boldsymbol{K}^{\mathrm{H}}(\theta)\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{K}(\theta)\boldsymbol{e}(\varphi)}=\frac{1}{\boldsymbol{g}(\theta,\varphi)} \tag{22}$$

令$\boldsymbol{J}(\theta)=\boldsymbol{K}^{\mathrm{H}}(\theta)\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{K}(\theta)$，则有：

$$\boldsymbol{g}(\theta,\varphi)=\boldsymbol{e}^{\mathrm{H}}(\varphi)\boldsymbol{J}(\theta)\boldsymbol{e}(\varphi) \tag{23}$$

利用约束关系$\boldsymbol{e}_0^{\mathrm{H}}\boldsymbol{e}(\varphi)=1$，其中$\boldsymbol{e}_0=[1,0]^{\mathrm{T}}$，消除平凡解$\boldsymbol{e}(\varphi)=0$，这样问题(19)变成了下面的优化问题[22]：

$$\min_{\theta,\varphi}\boldsymbol{e}^{\mathrm{H}}(\varphi)\boldsymbol{J}(\theta)\boldsymbol{e}(\varphi),\ \mathrm{s.t.}\ \boldsymbol{e}_0^{\mathrm{H}}\boldsymbol{e}(\varphi)-1=0 \tag{24}$$

这是一个线性约束下的二次型函数优化问题，可以利用Lagrange乘子法写出对应的Lagrange函数为[23]：

$$L(\boldsymbol{e},\lambda)=\boldsymbol{e}^{\mathrm{H}}(\varphi)\boldsymbol{J}(\theta)\boldsymbol{e}(\varphi)+2\mathrm{Re}\left[\lambda(\boldsymbol{e}_0^{\mathrm{H}}\boldsymbol{e}(\varphi)-1)\right] \tag{25}$$

式中λ为Lagrange乘子。对Lagrange函数关于$\boldsymbol{e}^*(\varphi)$求一阶Wirtinger偏导，并令其为0[24]，有：

$$\frac{\partial L(\boldsymbol{e},\lambda)}{\partial\boldsymbol{e}^*(\varphi)}=\boldsymbol{J}(\theta)\boldsymbol{e}(\varphi)+\lambda\boldsymbol{e}_0=0 \tag{26}$$

则可以得到：

$$\boldsymbol{e}(\varphi)=-\lambda\boldsymbol{J}^{-1}(\theta)\boldsymbol{e}_0 \tag{27}$$

代入约束关系中可以得到$\lambda=-[\boldsymbol{e}_0^{\mathrm{H}}\boldsymbol{J}^{-1}(\theta)\boldsymbol{e}_0]^{-1}$，再代回式(27)，得到：

$$\boldsymbol{e}(\varphi)=\frac{\boldsymbol{J}^{-1}(\theta)\boldsymbol{e}_0}{\boldsymbol{e}_0^{\mathrm{H}}\boldsymbol{J}^{-1}(\theta)\boldsymbol{e}_0} \tag{28}$$

将得到的解代入式(22)，可以得到降维后的代价函数为：

$$f_{\mathrm{PM-GAM}}(\theta)=\boldsymbol{e}_0^{\mathrm{H}}\left[\boldsymbol{K}^{\mathrm{H}}(\theta)\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{K}(\theta)\right]^{-1}\boldsymbol{e}_0 \tag{29}$$

这样只需要对角度维进行一维搜索，寻找到前 Q 个谱峰，其对应位置的角度即为中心波达角的估计值 $\{\hat{\theta}_q\}_{q=1}^{Q}$：

$$\hat{\theta}=\arg\max_{\theta}\boldsymbol{e}_0^{\mathrm{H}}\left[\boldsymbol{K}^{\mathrm{H}}(\theta)\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{K}(\theta)\right]^{-1}\boldsymbol{e}_0 \tag{30}$$

为更好地理解所提算法，给出了算法的主要步骤：

algorithm:the proposed PM–GAM

Input:the received signals $\boldsymbol{X}$, sensor number M, SNR value SNR, snapshot number L

Output:the estimated nominal DOAs $\{\hat{\theta}_q\}_{q=1}^{Q}$

Step 1:use the received signals to obtain the sample covariance matrix $\hat{\boldsymbol{R}}$

Step 2:segment the SCM via (20) and employ (21) to calculate the propagator method based matrix

Step 3:calculate the matrix $\boldsymbol{T}$(16) and then construct the objective function (29)

Step 4:perform the one–dimensional search via (30) to find the largest Q spectrum peaks, and the corresponding angles are the desired nominal DOAs $\{\hat{\theta}_q\}_{q=1}^{Q}$

3 性能分析

3.1 计算复杂度分析

分析所提算法 PM–GAM 的计算复杂度，只考虑将复乘次数作为衡量计算复杂度的因素：a) 由接收信号 $\boldsymbol{X}\in\mathbb{C}^{M\times L}$ 计算得到的采样协方差矩阵 $\hat{\boldsymbol{R}}\in\mathbb{C}^{M\times M}$(式(12))的复杂度为 $\mathcal{O}\{M^2L\}$；b) 将 $\hat{\boldsymbol{R}}$ 进行分块(式(20))后利用最小二乘得到传播算子矩阵 $\boldsymbol{P}$(式(21))，求解 $\boldsymbol{G}\in\mathbb{C}^{M\times Q}$ 的加号逆的复杂度为 $\mathcal{O}\{2MQ^2+Q^3\}$，之后与 $\boldsymbol{H}$ 相乘复杂度为 $\mathcal{O}\{M^2Q-MQ^2\}$，则总复杂度为 $\mathcal{O}\{MQ(M+Q)+Q^3\}$；c) 每次角度搜索时，计算降维后的代价函数(式(30))的计算复杂度为 $\mathcal{O}\{4M(M-Q+1)+14\}$，设沿角度维的搜索网格数为 L_θ，则总计算和搜索的复杂度为 $\mathcal{O}\{L_\theta[4M(M-Q+1)+14]\}$。综上步骤 a)~c)，得到所提算法总的计算复杂度为 $\mathcal{O}\left\{L_\theta[4M(M-Q+1)+14]+MQ(M+Q)+Q^3+M^2L\right\}$。

对比的 CD 信源 DOA 估计算法为：a) 基于子空间正交的二维搜索算法 DSPE[6]；b) 基于移不变阵列的传播算子算法 PM–CD[11]；c) 基于移不变阵列的降秩 ESPRIT 算法 ESPRIT–CD[10]。本文给出了上述 3 种对比算法的总复杂度，为直观体现，表 1 列出了各算法的复杂度。

进一步地，为了更能直观体现各算法的复杂度对比情况，给出了各算法关于阵元数从 8 到 20、步长为 2 变化的复杂度情形。参数设置为：信源数 $Q=2$，快拍数 $L=300$，对于需要谱峰搜索的算法其沿角度维和散射系数维搜索网格数各为 $L_\theta=1\,801$ 和 $L_\varphi=501$。从图 2 可以看到，由于 DSPE 算法需要二维搜索，其复杂度是最高的；对于依赖阵列移不变性的 PM–CD 和 ESPRIT–CD 算法，因其拥有闭式解，两者复杂度都是最低的，并且基本相当；而所提算法只需要一维搜索，其复杂度是介于前三者之间的，计算复杂度较低。

表 1 各算法的计算复杂度

Table1 Computational complexity of various algorithms

algorithms	computational complexity
PM–GAM	$\mathcal{O}\{L_\theta[4M(M-Q+1)+14]+MQ(M+Q)+Q^3+M^2L\}$
DSPE algorithm[6]	$\mathcal{O}\{L_\theta L_\varphi M(2M-2Q+1)+M^3+M^2L\}$
PM–CD algorithm[11]	$\mathcal{O}\{MQ(2.5Q+M)+3Q^3+M^2L\}$
ESPRIT–CD algorithm[10]	$\mathcal{O}\{Q^2(2Q+1.5M)+M^3+M^2L\}$

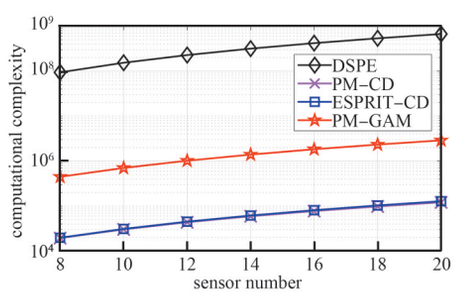

Fig.2 Computational complexity comparison versus the sensor number

图 2 各算法关于阵元数变化的计算复杂度对比图

3.2 克拉美罗下界推导

克拉美罗下界作为主流的未知参数无偏估计方差的性能下界[25]，可以提供 DOA 估计算法的性能基准，因此推导本场景下的克拉美罗下界是十分重要的。

首先，给出涉及的未知参数向量为：

$$\boldsymbol{\rho}=[\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_Q,\mathrm{Re}(\varphi_1),\mathrm{Re}(\varphi_2),\cdots,\mathrm{Re}(\varphi_Q),\mathrm{Im}(\varphi_1),\mathrm{Im}(\varphi_2),\cdots,\mathrm{Im}(\varphi_Q),\sigma_{s1}^2,\sigma_{s2}^2,\cdots,\sigma_{sQ}^2,\sigma_n^2]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^{4Q+1} \tag{31}$$

对应的Fisher信息矩阵(Fisher Information Matrix，FIM)的第(i,j)个元素可表示为[26]：

$$[\boldsymbol{J}]_{ij}=L\mathrm{Tr}\left\{\frac{\partial\boldsymbol{R}}{\partial\boldsymbol{\rho}_i}\boldsymbol{R}\frac{\partial\boldsymbol{R}}{\partial\boldsymbol{\rho}_j}\boldsymbol{R}\right\} \tag{32}$$

由文献[27]的结论，令$\boldsymbol{z}\triangleq\mathrm{vec}(\boldsymbol{R})$后，可以重写式(32)为：

$$\boldsymbol{J}=L\left(\frac{\partial\boldsymbol{z}}{\partial\boldsymbol{\rho}^{\mathrm{T}}}\right)^{\mathrm{H}}\left(\boldsymbol{R}^{-\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{R}^{-1}\right)\left(\frac{\partial\boldsymbol{z}}{\partial\boldsymbol{\rho}^{\mathrm{T}}}\right) \tag{33}$$

在本文中，仅对中心波达角参数$\boldsymbol{\theta}=[\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_Q]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^{Q\times1}$感兴趣，对于散射系数、信号以及噪声功率则将其归为无用参数$\boldsymbol{\upsilon}\in\mathbb{R}^{3Q+1}$中，则有$\boldsymbol{\rho}=[\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\upsilon}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$。根据该结构，有如下分块[14]：

$$\left(\boldsymbol{R}^{-\mathrm{T}/2}\otimes\boldsymbol{R}^{-1/2}\right)\left[\frac{\partial\boldsymbol{z}}{\partial\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}}\middle|\frac{\partial\boldsymbol{z}}{\partial\boldsymbol{\upsilon}^{\mathrm{T}}}\right]=\left[\boldsymbol{U}(\boldsymbol{\upsilon})\middle|\boldsymbol{V}(\boldsymbol{\theta})\right] \tag{34}$$

式中:$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{\upsilon})$、$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{\theta})$分别为$\boldsymbol{\upsilon}$、$\boldsymbol{\theta}$的函数矩阵。

这样，FIM可以简洁地表示为：

$$\boldsymbol{J}=L\begin{bmatrix}\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}} & \boldsymbol{V}\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\\ \boldsymbol{U}\boldsymbol{V}^{\mathrm{H}} & \boldsymbol{V}\boldsymbol{V}^{\mathrm{H}}\end{bmatrix} \tag{35}$$

本文只关心与$\boldsymbol{\theta}$对应的分块矩阵，即左上角块矩阵；利用Woodbury恒等式对FIM求逆后，可得到关于$\boldsymbol{\theta}$的克拉美罗下界为：

$$\mathrm{CRB}(\boldsymbol{\theta})=\frac{1}{L}(\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\Pi}_V^{\perp}\boldsymbol{U})^{-1} \tag{36}$$

详细地，对式(34)中的$\boldsymbol{U}$和$\boldsymbol{V}$分析：

$$\boldsymbol{U}(:,q)=\mathrm{vec}\left\{\boldsymbol{R}^{-1/2}\frac{\partial\boldsymbol{R}}{\partial\boldsymbol{\theta}_i}\boldsymbol{R}^{-1/2}\right\} \tag{37}$$

而矩阵$\boldsymbol{V}$可以根据参数不同继续分块为：

$$\boldsymbol{V}=\left[\boldsymbol{V}_r\middle|\boldsymbol{V}_i\middle|\boldsymbol{V}_s\middle|\boldsymbol{V}_n\right] \tag{38}$$

式中：$\boldsymbol{V}_r(:,q)=\mathrm{vec}\left\{\boldsymbol{R}^{-1/2}\frac{\partial\boldsymbol{R}}{\partial\mathrm{Re}(\varphi_q)}\boldsymbol{R}^{-1/2}\right\}$；$\boldsymbol{V}_i(:,q)=\mathrm{vec}\left\{\boldsymbol{R}^{-1/2}\frac{\partial\boldsymbol{R}}{\partial\mathrm{Im}(\varphi_q)}\boldsymbol{R}^{-1/2}\right\}$；$\boldsymbol{V}_s(:,q)=\mathrm{vec}\left\{\boldsymbol{R}^{-1/2}\frac{\partial\boldsymbol{R}}{\partial\sigma_{sq}^2}\boldsymbol{R}^{-1/2}\right\}$；$\boldsymbol{V}_n=\mathrm{vec}\left\{\boldsymbol{R}^{-1}\right\}$。

接下来，给出期望协方差矩阵$\boldsymbol{R}$关于各未知参数求导后的结果：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\boldsymbol{R}}{\partial\boldsymbol{\theta}_q}=\sigma_{sq}^2\left[\left(\dfrac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial\boldsymbol{\theta}_q}+\varphi_q\dfrac{\partial\boldsymbol{d}}{\partial\boldsymbol{\theta}_q}\right)\boldsymbol{b}_q^{\mathrm{H}}+\boldsymbol{b}_q\left(\dfrac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial\boldsymbol{\theta}_q}+\varphi_q\dfrac{\partial\boldsymbol{d}}{\partial\boldsymbol{\theta}_q}\right)^{\mathrm{H}}\right],\ \dfrac{\partial\boldsymbol{R}}{\partial\sigma_{sq}^2}=\boldsymbol{b}_q\boldsymbol{b}_q^{\mathrm{H}}\\ \dfrac{\partial\boldsymbol{R}}{\partial\mathrm{Re}(\varphi_q)}=\sigma_{sq}^2\left[\boldsymbol{d}\boldsymbol{b}_q^{\mathrm{H}}+\boldsymbol{b}_q\boldsymbol{d}^{\mathrm{H}}\right],\ \dfrac{\partial\boldsymbol{R}}{\partial\mathrm{Im}(\varphi_q)}=\mathrm{j}\sigma_{sq}^2\left[\boldsymbol{d}\boldsymbol{b}_q^{\mathrm{H}}+\boldsymbol{b}_q\boldsymbol{d}^{\mathrm{H}}\right]\end{cases} \tag{39}$$

至此，克拉美罗下界推导完毕。

4　数值仿真与分析

对所提算法PM–GAM测向性能进行数值仿真和分析，对比算法为3.1节中所提到的DSPE[6]、PM–CD[11]和ESPRIT–CD[10]算法，另外还加入了3.2节所推导的克劳美罗下界作为性能基准。

为定量分析算法性能，引入均方根误差(Root Mean Square Error，RMSE)[28]作为性能指标，其定义为：

$$E_{\mathrm{RMS}}=\frac{1}{Q}\sum_{q=1}^{Q}\sqrt{\frac{1}{M_{\mathrm{total}}}\sum_{m=1}^{M_{\mathrm{total}}}\left(\hat{\theta}_{m,q}-\theta_q\right)^2} \tag{40}$$

式中：M_{total} 为总的蒙特卡罗仿真次数，本节一致采用500次蒙特卡罗仿真次数；$\hat{\theta}_{m,q}$ 为算法估计在第 m 次仿真下得到的第 q 个信源中心波达角估计值。

为使PM–CD和ESPRIT–CD对比算法可以有效估计出中心波达角，采用2个阵元数均为 $M/2$ 的子均匀线阵且两者之间偏移距离为 $\lambda/10$ 组合阵列，总阵元数即为 M。在该阵型下，且实验中散射系数均设置为实数，分别进行了5组仿真，结果和分析如下。

图3为信噪比在0~25 dB范围内的各算法RMSE性能对比，总阵元数 $M=16$，快拍数 $L=300$，采用的双信源中心波达角为 $\boldsymbol{\theta}=[10°,45°]^{\mathrm{T}}$，散射系数为 $\boldsymbol{\varphi}=[0.08,0.1]^{\mathrm{T}}$。从图中可以看到，PM–CD和ESPRIT–CD算法性能基本一致，这是因为它们本质上都是利用移不变性估计出波达角的，唯一不同的是ESPRIT–CD是利用特征值分解得到子空间，而PM–CD则是得到传播算子矩阵。在后续的实验结果中均表明两者性能基本一致，故不再叙述。另外，虽然DSPE算法性能是最好的，但计算成本高昂，相比之下，本算法利用降维技术可以降低复杂度，并保持较好的估计性能。

此外，为探究信源个数对本算法的测向性能影响，在上述参数设置条件下，改变信源个数：当 $Q=1$ 时，信源参数为 $\theta=10°$，$\varphi=0.08$；当 $Q=3$ 时，为 $\boldsymbol{\theta}=[10°,45°,70°]^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{\varphi}=[0.08,0.1,0.15]^{\mathrm{T}}$。从图4可以看出，本算法都可以有效且准确地估计出多信源的中心波达角。

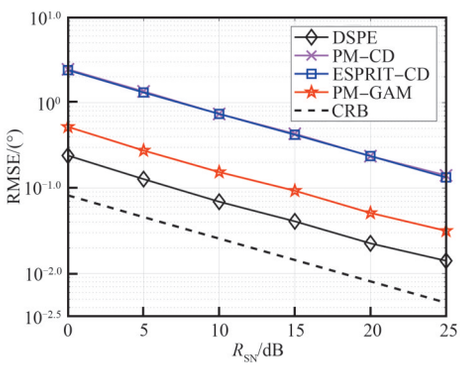

Fig.3 RMSEs of various algorithms versus SNR
图3 各算法关于信噪比变化RMSE性能对比图

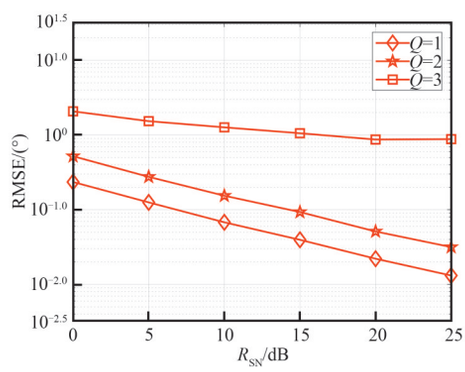

Fig.4 RMSEs of the proposed algorithm versus source number
图4 所提算法关于信源数变化RMSE性能对比图

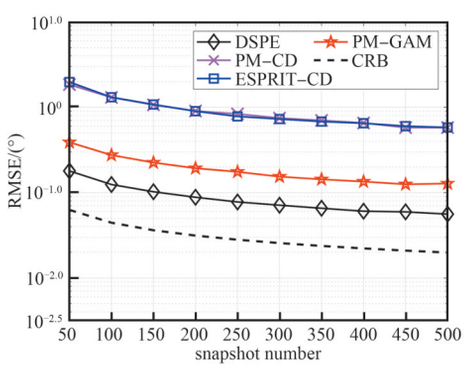

Fig.5 RMSEs of various algorithms versus snapshot number
图5 各算法关于快拍数变化RMSE性能对比图

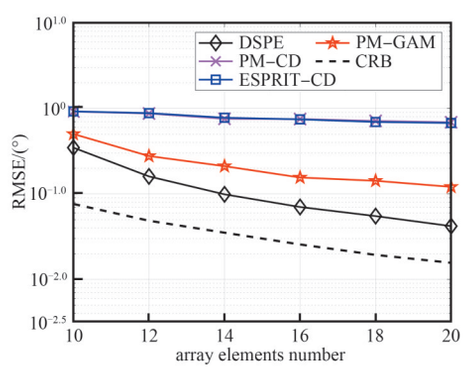

Fig.6 RMSEs of various algorithms versus array elements number
图6 各算法关于阵元数变化RMSE性能对比图

图5是快拍数从50至500、步长为50下的各算法RMSE性能对比，总阵元数 $M=16$，信噪比 $R_{\text{SN}}=10$ dB，采用的双信源中心波达角为 $\boldsymbol{\theta}=[10°,45°]^{\mathrm{T}}$，散射系数为 $\boldsymbol{\varphi}=[0.08,0.1]^{\mathrm{T}}$。可以看出，本算法性能优于PM–CD和ESPRIT–CD算法，稍差于复杂度较高的DSPE算法。

图6是阵元数从10至20、步长为2变化下的各算法RMSE性能对比，信噪比 $R_{\text{SN}}=10$ dB，快拍数 $L=300$，采用的双信源中心波达角为 $\boldsymbol{\theta}=[10°,45°]^{\mathrm{T}}$，散射系数为 $\boldsymbol{\varphi}=[0.08,0.1]^{\mathrm{T}}$。可以看出，PM–CD和ESPRIT–CD算法性能对阵元数并不是特别敏感，而所提PM–GAM算法和DSPE算法随着阵元数的减少，两者性能更加接近。

最后检验算法的中心波达角分辨力。首先固定一个信源不变，参数为 $\theta_1=10°$，$\varphi_1=0.08$；令另一个信源的散射系数保持 $\varphi_2=0.1$ 不变，而中心波达角从 $\theta_2=15°$ 以步长5°增加至 $\theta_2=50°$。其他参数设置为：总阵元数 $M=16$，信噪比 $R_{\text{SN}}=10$ dB，快拍数 $L=300$，蒙特卡罗仿真的结果如图7所示。可以看到，每个算法的RMSE都有一个先

降低再略微上升的趋势：PM-CD和ESPRIT-CD算法是在DOA间距为15°的时候分辨力最高，DSPE算法在大概25°时，而所提算法是在大约30°时达到最好的分辨性能。

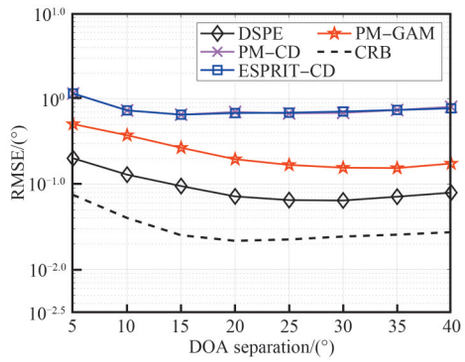

Fig.7 RMSEs of various algorithms versus DOA separation under double sources

图7 在双信源下各算法关于DOA间距变化RMSE性能对比图

5 结论

本文提出一种基于广义阵列流形近似模型的低复杂度降维传播算子算法。该算法通过广义阵列流形近似模型实现对中心波达角和角度扩展的解耦，并且使用降维技术后仅需一维角度搜索便可完成测向功能，使本算法在一些角分布函数未知或硬件计算资源有限的情况下可以精确完成测角工作。另外，本文还详细推导了基于广义阵列流形近似模型下相干分布式信源DOA估计的克拉美罗下界，为该场景下的算法对比提供性能基准。但本算法与DSPE等子空间类算法一样，都需要精确的信源个数先验知识，使应用场景受限，如何对该类算法进行改进是未来需要研究的问题。

参考文献：

[1] ZHANG Zhe,SHI Junpeng,WEN Fangqing. Phase compensation-based 2D-DOA estimation for EMVS-MIMO radar[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2024,60(2):1299-1308. DOI:10.1109/TAES.2023.3335194.

[2] TIAN Ye,LIU Shuai,LIU Wei,et al. Vehicle positioning with deep-learning-based direction-of-arrival estimation of incoherently distributed sources[J]. IEEE Internet of Things Journal, 2022,9(20):20083-20095. DOI:10.1109/JIOT.2022.3171820.

[3] 李嘉琪,施云鹤,张小飞. 基于稀疏贝叶斯推断的密集城区内无人机目标直接定位算法[J]. 信号处理, 2024,40(5):815-825. (LI Jiaqi, SHI Yunhe, ZHANG Xiaofei. Direct localization of UAV targets in dense urban areas based on sparse Bayesian inference[J]. Journal of Signal Processing, 2024,40(5):815-825.) DOI:10.16798/j.issn.1003-0530.2024.05.002.

[4] LIU Yapeng,GAO Hongyuan,DU Yanan,et al. DOA estimation for mixed circular and noncircular coherently distributed sources under impulsive noise[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2024, 60(5): 6622-6637. DOI: 10.1109/TAES.2024.3405450.

[5] RAICH R,GOLDBERG J,MESSER H. Bearing estimation for a distributed source:modeling, inherent accuracy limitations and algorithms[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2000,48(2):429-441. DOI:10.1109/78.823970.

[6] VALAEE S, CHAMPAGNE B, KABAL P. Parametric localization of distributed sources[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1995,43(9):2144-2153. DOI:10.1109/78.414777.

[7] TIAN Quan,QIU Tianshuang,CAI Ruiyan. DOA estimation for CD sources by complex cyclic correntropy in an impulsive noise environment[J]. IEEE Communications Letters, 2020,24(5):1015-1019. DOI:10.1109/LCOMM.2020.2976957.

[8] ZOUBIR A,WANG Y D. Performance analysis of the generalized beamforming estimators in the case of coherently distributed sources[J]. Signal Processing, 2008,88(2):428-435. DOI:10.1016/j.sigpro.2007.08.010.

[9] 刘云天,史鑫磊. 多基站非圆信号直接定位:降维PM与泰勒补偿[J]. 太赫兹科学与电子信息学报, 2023,21(6):725-733. (LIU Yuntian, SHI Xinlei. DPD of NC signals with multiple base stations: reduced dimension Propagator Method and Taylor compensation[J]. Journal of Terahertz Science and Electronic Information Technology, 2023, 21(6): 725-733.) DOI: 10.11805/TKYDA2022210.

[10] SHAHBAZPANAHI S,VALAEE S,BASTANI M H. Distributed source localization using ESPRIT algorithm[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2001,49(10):2169-2178. DOI:10.1109/78.950773.

[11] CAO Renzheng,ZHANG Xiaofei,GAO Feifei. Propagator-based algorithm for localization of coherently distributed sources[C]// 2016 the 8th International Conference on Wireless Communications & Signal Processing(WCSP). Yangzhou,China:IEEE, 2016:1-5. DOI:10.1109/WCSP.2016.7752674.

[12] ASZTÉLY D,OTTERSTEN B,SWINDLEHURST A L. Generalised array manifold model for wireless communication channels with local scattering[J]. IEE Proceedings-Radar,Sonar and Navigation, 1998,145(1):51-57. DOI:10.1049/ip-rsn:19981768.

[13] ASTELY D,OTTERSTEN B. The effects of local scattering on direction of arrival estimation with MUSIC[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1999,47(12):3220-3234. DOI:10.1109/78.806068.

[14] CAO Renzheng,GAO Feifei,ZHANG Xiaofei. An angular parameter estimation method for incoherently distributed sources via

generalized shift invariance[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2016, 64(17): 4493－4503. DOI: 10.1109/TSP. 2016. 2557312.

[15] TIAN Ye,GAO Xinyu,LIU Wei,et al. Localization of mixed coherently and incoherently distributed sources based on generalized array manifold[J]. Signal Processing, 2023(209):109038. DOI:10.1016/j.sigpro.2023.109038.

[16] PALANIVELU D P,OISPUU M,KOCH W,et al. Direct position determination of locally scattered sources using generalized array manifold model[C]// 2024 IEEE the 13rd Sensor Array and Multichannel Signal Processing Workshop(SAM). Corvallis,OR,USA: IEEE, 2024:1-5. DOI:10.1109/SAM60225.2024.10636685.

[17] GUO Ziyu,YANG Tao,CHEN Peng,et al. Angular parameter estimation for incoherently distributed sources with single RF chain[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2024(72):5244-5257. DOI:10.1109/TSP.2024.3446572.

[18] CHEN Minqiu, MAO Xingpeng, ZHAO Chunlei. Direct localization of emitters based on sparse Bayesian learning[J]. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 2019,68(6):5769-5781. DOI:10.1109/TVT.2019.2910831.

[19] LIU Yapeng, GAO Hongyuan, DU Yanan, et al. Low－complexity DOA estimation for coherently distributed sources with gain－phase errors in massive MIMO systems[J]. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 2024,73(6):7939-7948. DOI:10.1109/TVT.2023.3348211.

[20] MARCOS S,MARSAL A,BENIDIR M. The propagator method for source bearing estimation[J]. Signal Processing, 1995,42(2): 121-138.

[21] LI Jianzhong,WANG Yide,REN Zhigang,et al. DOA and range estimation using a uniform linear antenna array without a priori knowledge of the source number[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2021, 69(5): 2929－2939. DOI: 10.1109/TAP.2020.3030997.

[22] ZHANG Xiaofei, XU Lingyun, XU Lei, et al. Direction Of Departure(DOD) and Direction Of Arrival(DOA) estimation in MIMO radar with reduced-dimension MUSIC[J]. IEEE Communications Letters, 2010,14(12):1161-1163. DOI:10.1109/LCOMM.2010.102610.101581.

[23] BOYD S,VANDENBERGHE L. Convex optimization[M]. Cambridge:Cambridge University Press, 2004.

[24] WEN Fangqing,SHI Junpeng,GUI Guan,et al. Joint DOD and DOA estimation for NLOS target using IRS-aided bistatic MIMO radar[J]. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 2024,73(10):15798-15802. DOI:10.1109/TVT.2024.3408813.

[25] LI Jiaqi,DONG Xudong,SHI Xinlei,et al. An enhanced direct position determination of non-circular sources via sparse Bayesian inference and grid refinement strategy[J]. Digital Signal Processing, 2024(151):104564. DOI:10.1016/j.dsp.2024.104564.

[26] STOICA P, LARSSON E G, GERSHMAN A B. The stochastic CRB for array processing: a textbook derivation[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2001,8(5):148-150. DOI:10.1109/97.917699.

[27] YIN Jiexin,WU Ying,WANG Ding. Direct position determination of multiple noncircular sources with a moving array[J]. Circuits Systems and Signal Processing, 2017,36(10):4050-4076. DOI:10.1007/s00034-017-0499-4.

[28] DONG Xudong,ZHANG Xiaofei,ZHAO Jun,et al. Non-circular sources DOA estimation for coprime array with impulsive noise: a novel augmented phased fractional low-order moment[J]. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 2022,71(10): 10559-10569. DOI:10.1109/TVT.2022.3184385.

作者简介：

董成武(1971–)，男，学士，高级工程师，主要研究方向为电网调度自动化技术.email:dxdcw@126.com.

牛　芳(1982–)，女，学士，高级工程师，主要研究方向为电网调度运行技术.

夭小丽(1983–)，女，学士，高级工程师，主要研究方向为电网调度运行技术.

李　璇(1999–)，女，学士，工程师，主要研究方向为调度自动化技术.

夏林伟(1991–)，男，学士，工程师，主要研究方向为配电网调度运行技术.

李嘉琪(2000–)，男，在读博士研究生，主要研究方向为阵列信号处理、直接定位技术和分布式信源定位技术.