

文章编号: 2095-4980(2017)06-1025-07

## 正切形非线性调频信号压缩感知

陈 旗<sup>1,2</sup>, 曹汉强<sup>1</sup>, 左 炜<sup>2</sup>

(1.华中科技大学 电子与信息工程系, 湖北 武汉 430033; 2.海军工程大学 电子工程学院, 湖北 武汉 430033)

**摘要:** 为了通过一组线性测量值重建原始信号, 并以低于奈奎斯特采样频率的速率采样, 开展本研究。对于线性调频信号, 分数阶傅里叶变换是在线性调频信号基上稀疏分解信号, 因此采用离散分数阶傅里叶变换的变换矩阵构造正交基字典矩阵, 通过调整调制参数(调制法)寻找最佳稀疏基, 可以较好地稀疏表示线性调频信号。同理, 采用调制法寻找正切形非线性调频信号的最佳稀疏基, 对其进行稀疏表示与重构的压缩感知研究。仿真结果表明: 该方法能够找到最佳稀疏基, 实现正切形非线性调频信号的稀疏表示与信号重构, 信号波形恢复效果较好。

**关键词:** 调制法; 正切形非线性调频; 压缩感知; 稀疏表示; 重构

中图分类号: TN971.1

文献标志码: A

doi: 10.11805/TKYDA201706.1025

## Construction of sparse dictionary for tangential NLFM signals based on compressed sensing

CHEN Qi<sup>1,2</sup>, CAO Hanqiang<sup>1</sup>, ZUO Wei<sup>2</sup>

(1.Department of Electronics & Information Engineering, HUST, Wuhan Hubei 430033, China; 2.Electronic Engineering College, Naval University of Engineering, Wuhan Hubei 430033, China)

**Abstract:** The study is intended to reconstruct the original signal through a linear measurement, and sampling at a speed lower than the Nyquist sampling frequency. Fractional Fourier Transform(FrFT) is applied to sparse represent signal on the Linear Frequency Modulation(LFM) basis to the LFM signal, so  $\Psi$  is substituted to the transforming matrix of Digital Fractional Fourier Transform(DFrFT), and the optimal sparse basis is gained by modulation method, then the sparse representation and reconstruction of signal is researched. Similarly, modulation method is utilized to find the optimal sparse basis of tangent-shape Nonlinear Frequency Modulation(NLFM) signals and complete the compressive sensing research of sparse representation and reconstruction. Simulation results show that the optimal sparse basis can be found with this method; and the sparse representation and reconstruction of tangent-shape NLFM signals can be accomplished with good recovery results.

**Keywords:** modulation method; tangential nonlinear frequency modulation; compressed sensing; sparse representation; reconstruction

压缩感知又称为压缩传感, 它是一种利用可稀疏的或可压缩的信号进行稀疏分解、信号重构的技术<sup>[1]</sup>, 即将原始可压缩信号稀疏分解为稀疏信号, 在获取编码测量信号的同时对信号进行适当压缩, 相当于在信号获取的过程中寻找最少的稀疏系数来表述信号, 得到稀疏信号, 再对稀疏信号进行欠采样处理<sup>[2]</sup>, 从而降低 A/D 器件与数字信号处理器(Digital Signal Processor, DSP)的待处理数据量, 并能在需要时用适当的重构算法从稀疏信号中重构恢复出原始信号。因此, 压缩感知技术可用于宽带甚至超宽带信号的欠采样处理。

在典型的压缩采样模型当中, 正交基字典矩阵  $\Psi$  的构建, 是能否对接收信号进行稀疏化表达的关键<sup>[3]</sup>。对于线性调频信号(LFM), 由于分数阶傅里叶变换(FrFT)是在 LFM 基上稀疏分解信号的<sup>[4]</sup>, 因此用离散分数阶傅里叶变换(DFrFT)的变换矩阵来代替  $\Psi$ , 可以很好地稀疏化表示 LFM 信号<sup>[5]</sup>。本文将采用类似的方式来为非线性调频(NLFM)构造基字典, 对于非线性调频信号而言, 用调制法产生的一组稀疏基是一组非常有效的正交矩阵, 可以很好恢复出原始信号。本文主要开展采用调制法来构造正切形 NLFM 的稀疏字典, 采用调整调频参数进行正切

形 NLFM 信号的最佳稀疏基选取与压缩感知研究。

## 1 正切形非线性调频信号

与 LFM 波形相比, NLFM 波形具有一些明显优点。因为可通过调频方式的设计, 使其产生所希望的具有所需时间副瓣电平的频谱形状, 所以 NLFM 波形不需频域加权来抑制时间副瓣。通过在脉冲两端增大频率调制变化的速率, 在中心附近减小频率调制变化的速率, 就可以锥削波形频谱, 使得匹配滤波器响应的的时间副瓣减小, 这样就避免了与频域加权(如对 LFM 波形)有关的信噪比损失<sup>[6]</sup>。

如果采用对称的频率调制和时域幅度加权来降低频率副瓣, 则 NLFM 波形可得到图钉状的模糊函数。一般对称波形的频率具有以下特点: 在脉冲的前半部分, 频率随时间递增(或递减); 在脉冲的后半部分, 频率随时间递减(或递增)。用对称波形的一半可形成非对称波形。但是非对称波形保留了 LFM 波形的一部分距离多普勒耦合<sup>[7]</sup>。NLFM 信号有多种类型, 本文主要讨论基于正切的 NLFM 信号。

正切形 NLFM 信号具有主副瓣比大、主瓣宽度窄等优点, 是 NLFM 的理想选择, 在 NLFM 范围应用较多, 一个基于正切的频率调制-时间函数由下式给出:

$$f(t) = \frac{B}{2 \tan \beta} \tan \frac{2\beta t}{T} \quad (1)$$

式中:  $B$  为信号带宽;  $T$  为脉冲宽度;  $\beta$  定义为:

$$\beta = \arctan \alpha, 0 \leq \alpha < \infty \quad (2)$$

式中  $\alpha$  为时间副瓣电平控制因子。

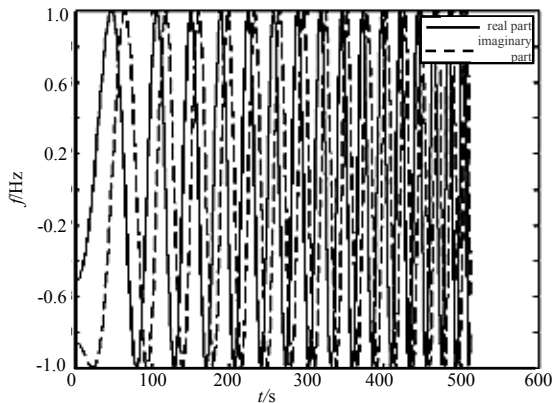


Fig.1 Tangent-based NLFM signal in time domain  
图1 基于正切的 NLFM 信号时域波形

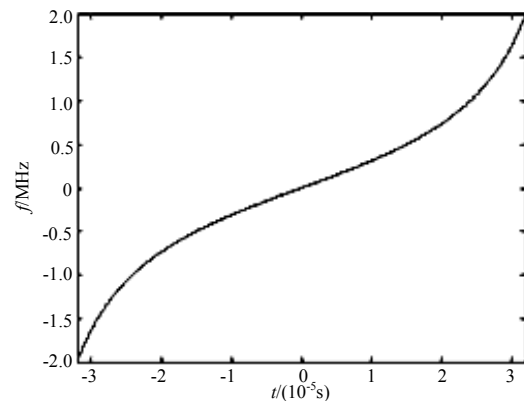


Fig.2 FM diagram of tangent-based NLFM signal  
图2 基于正切的 NLFM 信号频率调制图

当  $\alpha$  为 0 时, 基于正切的 NLFM 波形简化为一个线性调频波形。然而, 因为压缩后脉冲倾向于产生畸变, 所以  $\alpha$  不能取任意大, 本文将其取值限定在 5 以内。Collins 和 Atkins 讨论了基于正切的 NLFM 的一种扩展形式, 其频率调制函数是基于正切的项和线性频率调制项的一个加权和。

根据频率与相位之间的关系, 可以得到非线性调频信号的瞬时相位表达式:

$$\varphi(t) = 2\pi \int_{-\infty}^t f(t) dt = 2\pi \int_{-\infty}^t \frac{B}{2 \tan \beta} \tan \frac{2\beta t}{T} dt = -\frac{\pi B T}{2\beta \tan \beta} \ln \left[ \cos \left( \frac{2\beta t}{T} \right) \right] \quad (3)$$

信号的波形及其时频关系如图 1~3 所示。

## 2 基于调制法的 NLFM 信号稀疏字典构造原理

定义在  $t$  域的函数  $x(t)$  的  $p$  阶分数阶傅里叶变换是一个线性积分运算<sup>[8]</sup>

$$X_p(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{K}_p(u, t) \cdot x(t) dt \quad (4)$$

式中  $\tilde{K}_p(u, t) = A_\alpha \exp\left[j\pi\left(u^2 \cot \alpha - 2ut \csc \alpha + t^2 \cot \alpha\right)\right]$ ,

为分数阶傅里叶变换的核函数,  $A_\alpha = \sqrt{1 - j \cot \alpha}$ ,

$\alpha = p\pi/2, p \neq 2n, n$  是整数。

当  $p = 4n, \alpha = 2n\pi$  时,  $K_p(u, t) = \delta(u - t)$ ; 当

$p = 4n \pm 2, \alpha = (2n \pm 1)\pi$  时,  $\tilde{K}_p(u, t) = \delta(u + t)$ 。

经变量代换  $u = u/\sqrt{2\pi}$  和  $t = t/\sqrt{2\pi}$ , 式(4)可以进一步表示为:

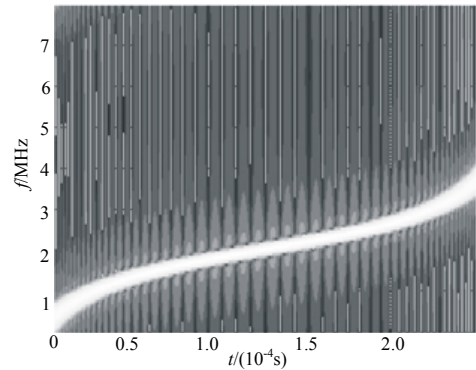


Fig.3 Time-frequency simulation of tangent-based NLFM signal (The bandwidth is half of the sampling rate.)

图 3 基于正切的 NLFM 信号时频仿真图信号带宽为采样率一半

$$X_p(u) = \left\{ F^p [x(t)] \right\} (u) = \int_{-\infty}^{+\infty} K_p(u, t) x(t) dt = \begin{cases} B_\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(j \frac{t^2 + u^2}{2} \cot \alpha - \frac{jtu}{\sin \alpha}\right) x(t) dt & \alpha \neq n\pi \\ x(t) & \alpha = 2n\pi \\ x(-t) & \alpha = (2n \pm 1)\pi \end{cases} \quad (5)$$

典型的压缩采样模型中  $\Psi$  是正交基字典矩阵, 是能否对接收信号进行稀疏化表达的关键<sup>[9]</sup>, 由于 FrFT 是在 LFM 基上分解信号的, 因此用 DFrFT 的变换矩阵来代替  $\Psi$ , 则应该可以很好地稀疏表示 LFM 信号。

设有接收信号向量  $x(n)$ , 其 DFT 变换向量为  $X(n)$ , 满足:

$$X(n) = F[x(n)] \quad (6)$$

式(6)是用 DFT 算子符号来表达 DFT 变换的。在本文中, 用矩阵  $F$  来表达这一变换, 如式(7):

$$X = Fx \quad (7)$$

式中  $F$  代表变化矩阵。同理, 可以用矩阵与向量相乘的方式来表达 DFrFT, 即:

$$X = F_r(p, u)x \quad (8)$$

式中参数  $p, u$  已在式(4)中被定义。由于 DFT 是 DFrFT 在  $p=1$  时的特例, 因此有:

$$F = F_r|_{p=1} \quad (9)$$

可见, 不同的  $p$  值将对应不同的变换矩阵, 因此可将  $F_r|_{p=1}$  记作  $F_r(p)$ 。而  $F_r(p)$  中的每一行代表一个 LFM 向量, 而这些向量的  $p$  值相同, 但  $u$  值不同。图 4 给出了  $p, u$  不同取值时  $F_r(p)$  行向量的时频特性曲线。观察该图, 可以发现  $p$  决定了行向量的调频斜率, 而  $u$  决定了行向量的频率偏移。也就是说,  $F_r(p)$  中的每一行拥有相同的调频斜率(由  $p$  决定), 但频率偏移(由  $u$  决定)不同。因此, 对于任意一个 LFM 向量, 总能通过改变  $p$  来找到一个行向量与之对应, 从而实现该 LFM 向量的稀疏表示。

而对于 NLFM 信号, 也将采用类似的方式来为非线性调频构造基字典。

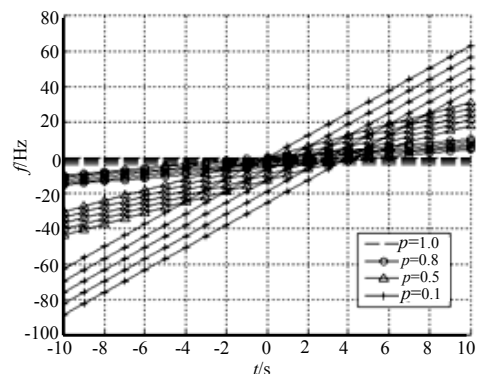


Fig.4 Time-frequency curves of the row vector in

$F_r(p)$  for different  $p$  and  $u$

图 4 当  $p, u$  取不同值时,  $F_r(p)$  中行向量的时频曲线

设有 NLFM 信号的基字典  $F$ ，该字典调频样式由参数向量  $p$  决定。以基于正切的 NLFM 信号为对象，对于基于正切的 NLFM 信号而言， $p = \varphi(B, \alpha)$ ，其中  $B$  为带宽， $\alpha$  为时间副瓣电平控制因子，当  $B$  或  $\alpha$  确定之后，基字典  $F$  也就被确定了。设正切形 NLFM 信号为对称调频分布，则  $F$  的第  $n$  行向量为调制频率，为  $(n-1)F_s/N$ ，如图 5、图 6 所示。

### 3 基于调制法构造稀疏字典的正切形 NLFM 信号压缩感知仿真

#### 3.1 稀疏向量 $\theta$ 的稀疏性分析与 NLFM 信号重构实验—仿真分析

设有 NLFM 信号向量  $x$ ，在  $F(p)$  变换条件下，满足：

$$F(p)\theta = x \tag{10}$$

则向量  $\theta$  就是  $x$  的稀疏表达。由于  $F(p)$  为非奇异，因此  $F(p)^{-1}F(p) = I$ ，有稀疏系数向量：

$$\theta = F(p)^{-1}F(p)\theta = F(p)^{-1}x \tag{11}$$

通过前述内容可知， $B$  或  $\alpha$  变化， $p$  就变化，当  $B$  或  $\alpha$  确定之后，调制参量  $p$  就确定了，正切形 NLFM 信号的基字典  $F$  也就被确定了，可以利用式(11)来考察正切形 NLFM 信号稀疏向量  $\theta$  的稀疏性。

假设基于正切的 NLFM 信号带宽已知，而  $\alpha$  未知。令测试信号长度  $N=512$ ， $\alpha=2.5$ ，得到变换矩阵  $F(2.5)$ ，取出其中的第 1 行记作  $x_0$ 。通过式(11)求解  $\theta$ ，对于接收信号  $x$  而言，侦察机往往不知道  $\alpha$ ，因此不知道当  $\alpha$  取何值时  $\theta$  的零范数最小，即  $\|\theta\|_0$

最小。为解决这一问题，分别将  $\alpha=0.5, 1.0, 1.5, \dots, 5.0$  代入到式(11)当中。

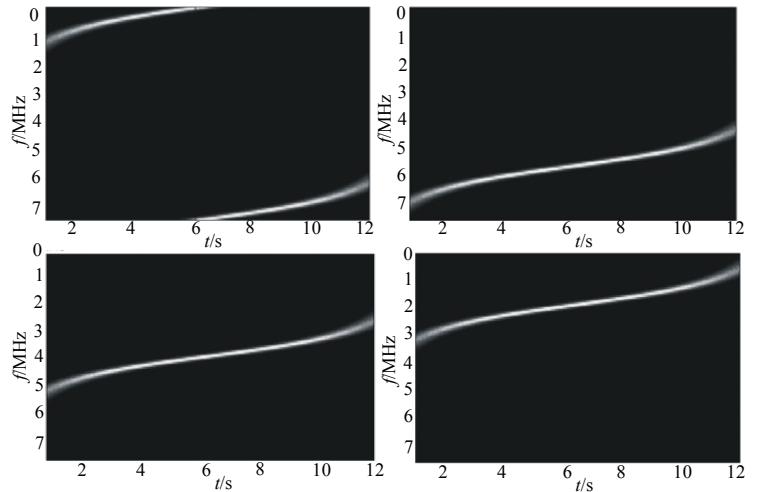


Fig.5 Time-frequency diagrams of the  $F$ th row vectors of the basic matrix for the tangent-based NLFM signal  
图 5 基于正切 NLFM 信号基矩阵  $F$  行向量的时频图

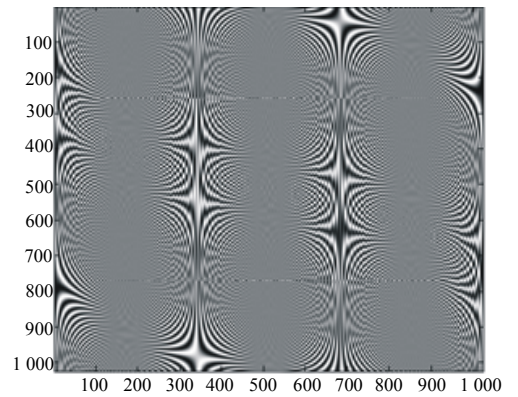
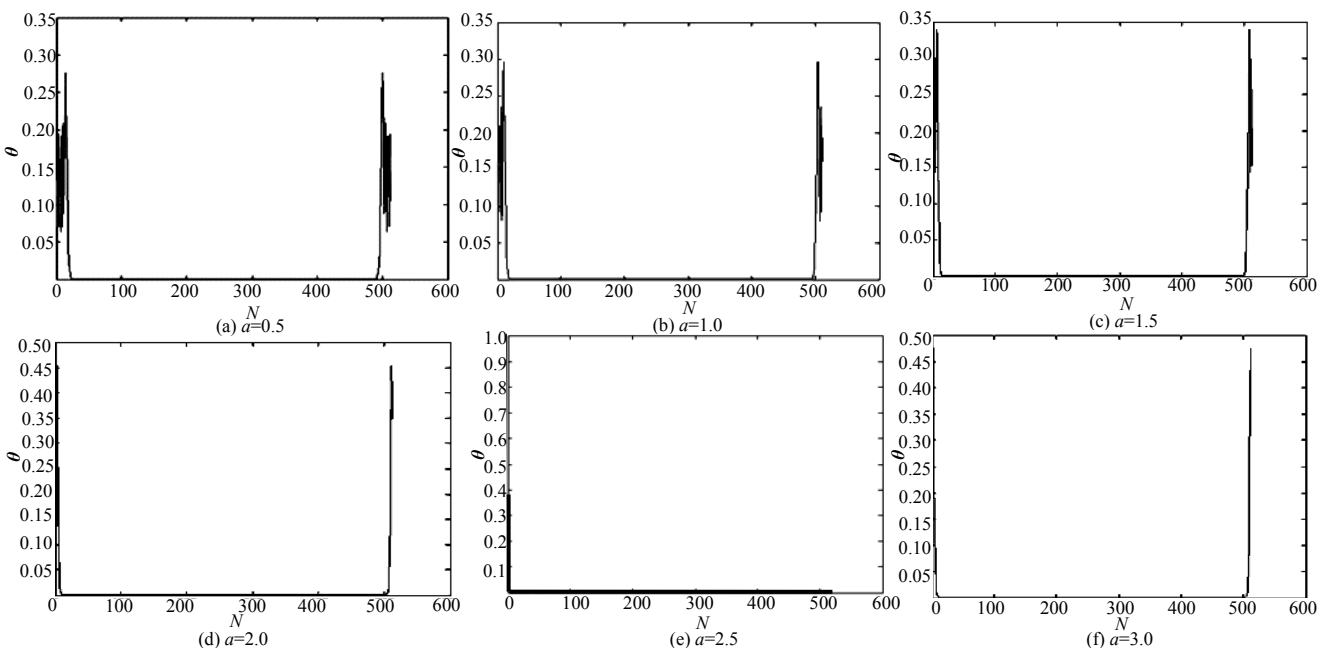


Fig.6 Real part image of the basic matrix  $F$  of the tangent-based NLFM signal  
图 6 基于正切 NLFM 信号基矩阵  $F$  的实部图像



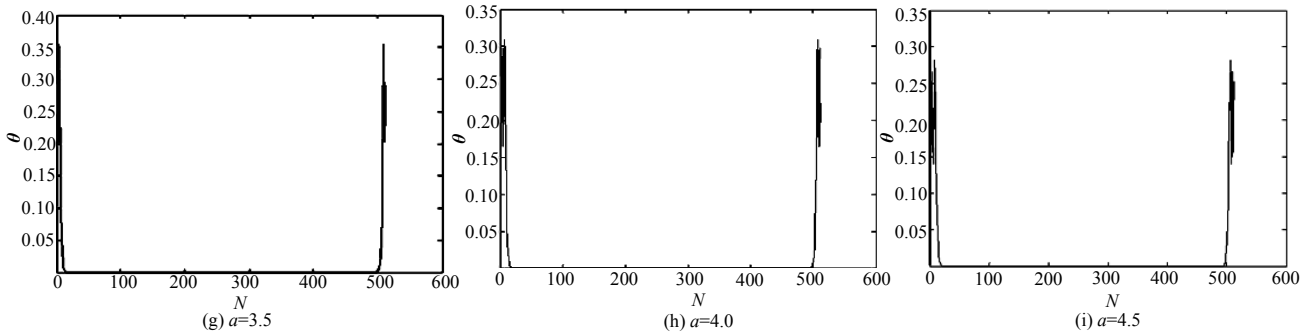


Fig.7  $\theta$  for  $a=0.5,1.0,1.5,\dots,4.5$

图 7 假设  $a=0.5,1.0,1.5,\dots,4.5$  时的  $\theta$

从图 7 可知, 当  $a=2.5$  时,  $\|\theta\|_0$  最小, 这与  $x$  取值一致, 最佳稀疏系数确定后开始重构仿真实验。实验中, 恢复算法采用 OMP, 当  $K=32$  时, 估计波形与原始波形的比较参见图 8。观察该图, 可以发现  $a=2.5$  时, 估计波形  $\bar{x}$  与原始波形  $x$  基本一致, 表明能够恢复出原始信号  $x$ 。

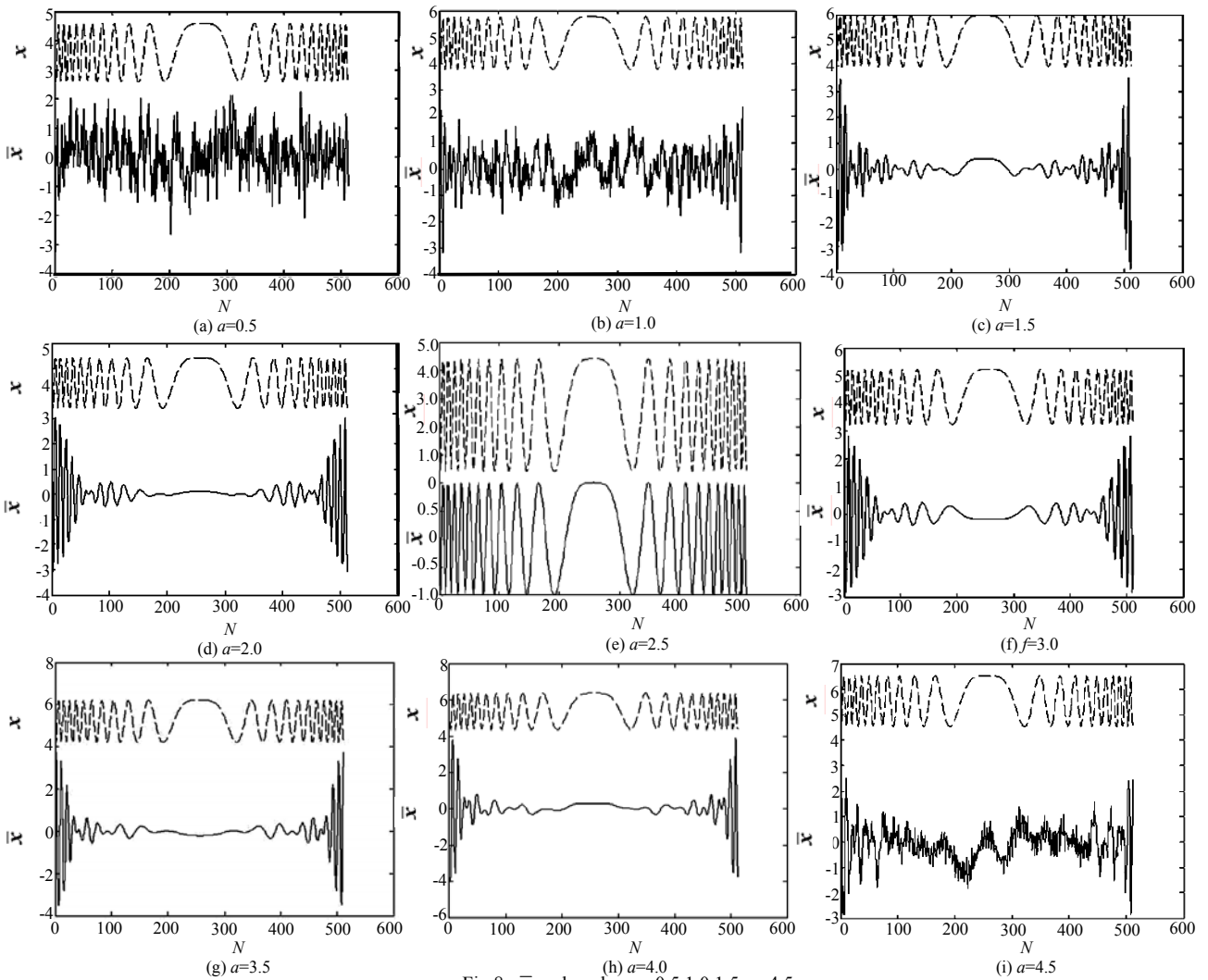


Fig.8  $\bar{x}$  and  $x$  when  $a=0.5,1.0,1.5,\dots,4.5$

图 8 假设  $a=0.5,1.0,1.5,\dots,4.5$  时的  $\bar{x}$  与  $x$

### 3.2 稀疏向量 $\theta$ 的稀疏性分析与 NLFM 信号重构实验二仿真分析

假设基于正切的 NLFM 信号带宽已知, 而  $\alpha$  不知。令测试信号长度  $N=512$ ,  $a=2.7$ , 得到变换矩阵  $F(2.7)$ , 取出其中的第 1 行记作  $x_0$ 。通过式(11)求解  $\theta$ , 同样, 对于接收信号  $x$  而言, 侦察机往往不知道  $\alpha$ , 因此不知道

当  $a$  取何值时  $\|\theta\|_0$  最小, 分别将  $\alpha=0.5, 1.0, 1.5, \dots, 5.0$  代入到式(11)当中。

观察图 9, 可以发现: 当  $\alpha=2.5$  或  $3.0$  时,  $\|\theta\|_0$  最小, 这是因为  $x$  对应  $a$  为  $2.7$ , 介于  $2.5$  与  $3.0$  之间。在实际情况下,  $x$  对应的  $a$  值为任意值, 不可能恰好等于  $0.5, 1.0, 1.5, \dots, 5.0$  等值, 因此很难得到实验 1 中的结果, 需要对  $a$  取值进行进一步的重构分析。

假设  $a=2.6, 2.7, 2.8, 2.9$  时重构的  $\tilde{x}$  与原始信号  $x$  进行波形比较, 可以看出在  $a=2.7$  时估计波形接近原始波形, 从图 10 可知, 当  $a=2.6, 2.7, 2.8, 2.9$  时重构恢复波形最接近原始波形, 这时  $a$  对应的值与原始信号  $x$  的取值  $a$  一致, 因此, 可以通过  $a$  取值逐步逼近的方法来判断  $\|\theta\|_0$  何时最小, 从而确定最佳波形匹配的稀疏基, 然后采用 OMP 算法重构恢复出原始信号波形。

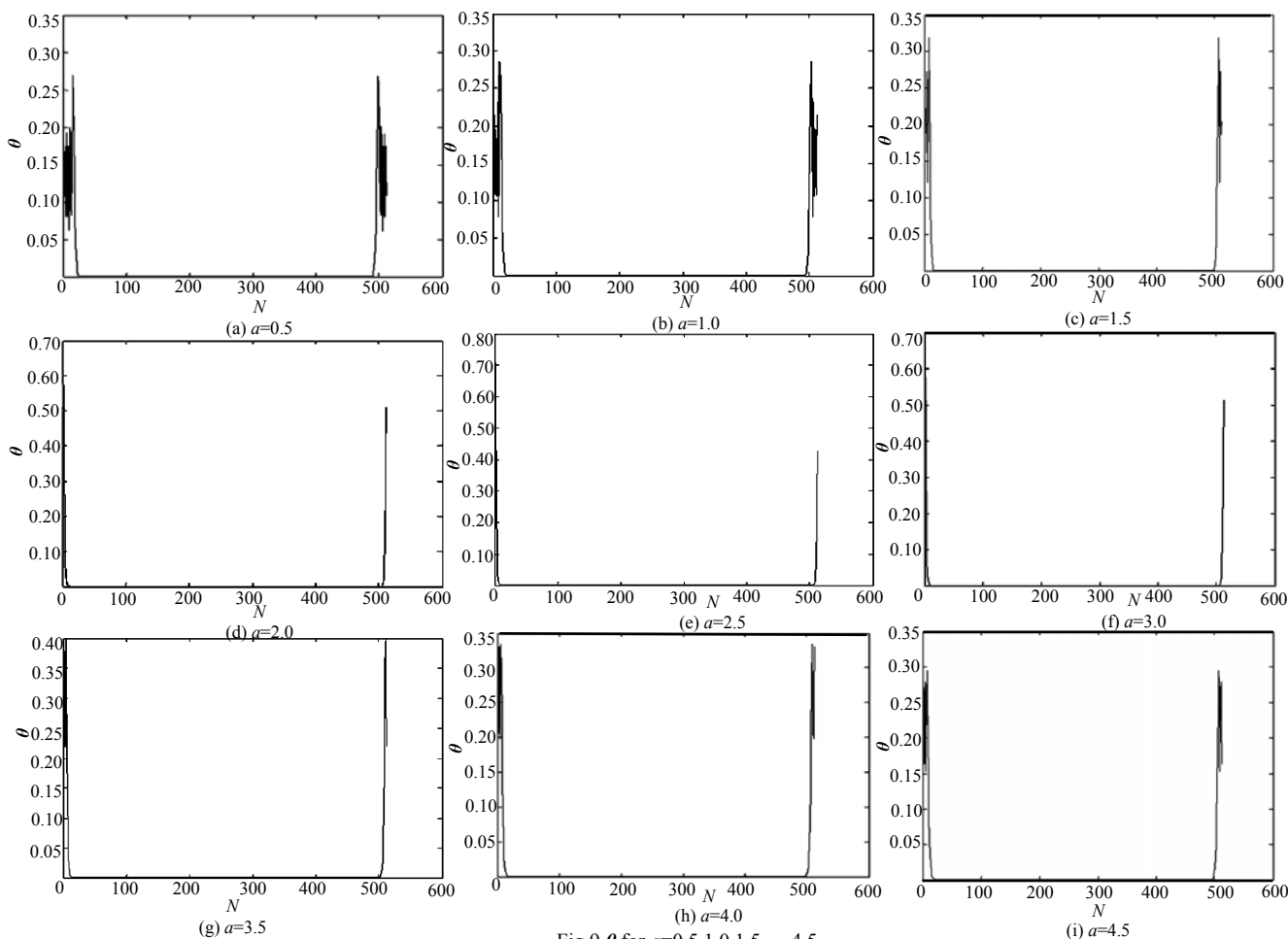
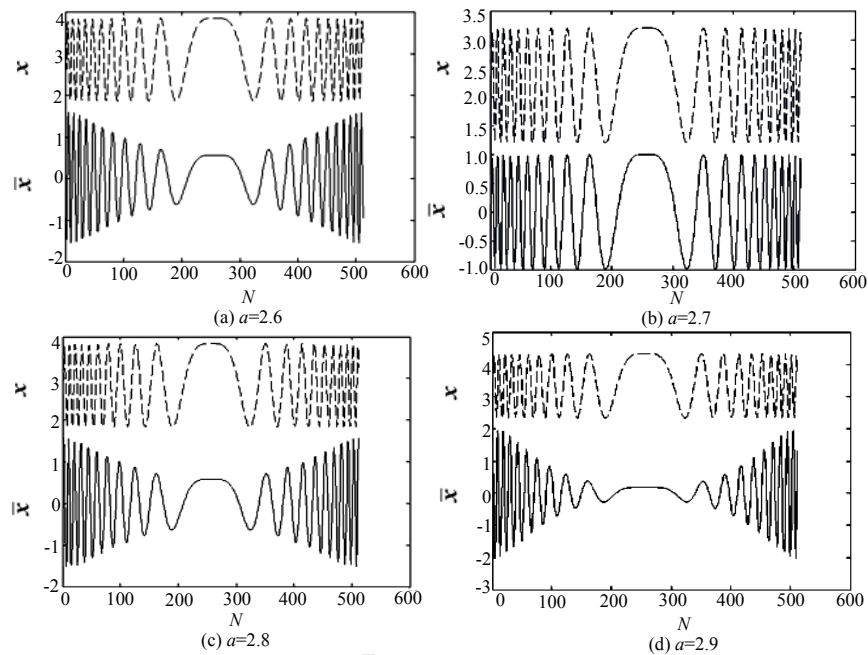


Fig.9  $\theta$  for  $a=0.5, 1.0, 1.5, \dots, 4.5$   
图9 假设  $a=0.5, 1.0, 1.5, \dots, 4.5$  时的  $\theta$

#### 4 结论

为了实现对正切形 NLFM 雷达信号的欠采样快速处理, 采用调制法对宽带 NLFM 信号进行稀疏字典构造与压缩感知研究。本文首先开展了 NLFM 信号的波形及其时频关系分析, 然后阐述了基于调制法的 NLFM 信号稀疏字典构造原理。通过基于调制法构造稀疏字典的正切形 NLFM 信号压缩感知仿真分析可知, 对于任意一个 NLFM 向量, 通过改变调频参数  $B$  或  $\alpha$  来改变  $p$ , 采用调制法在 DFrF 矩阵中总能找到一个最佳行向量(稀疏基)  $\theta$  与之对应, 从而实现正切形 NLFM 信号的最佳稀疏表示。最后通过满足有限等距性质的高斯随机矩阵对稀疏表示后的正切形 NLFM 信号进行编码测量和 OMP 算法重构仿真, 能够恢复出最佳原始信号波形。

Fig.10  $\bar{x}$  and  $x$  when  $a=2.6,2.7,2.8,2.9$ 图10 假设  $a=2.6,2.7,2.8,2.9$  时的  $\bar{x}$  与  $x$ 

## 参考文献:

- [1] 石光明,刘丹华,高大化,等. 压缩感知理论及其研究进展[J]. 电子学报, 2009,(37)5:1070-1081. (SHI Guangming,LIU Danhua, GAO Dahua,et al. Advances in theory and application of compressed sensing[J]. Acta Electronica Sinica, 2009,37(5):1070-1081.)
- [2] YONINA C Eldar,GITTA Kutyniok. Compressive sensing-theory and application[M]. Cambridge:Cambridge University Press,2012.
- [3] 何国栋,谢小娟,杨凌云,等. 基于压缩感知的信号重构研究[J]. 无线电通信技术, 2014,40(3):26-28. (HE Guodong,XIE Xiaojuan,YANG Lingyun,et al. Research on signal reconstruction based on compressed sensing[J]. Radio Communication Technology, 2014,(40)3:26-28.)
- [4] 陶然,邓兵,王越. 分数阶 Fourier 变换在信号处理领域的研究进展[J]. 中国科学 E 辑信息科学, 2006,36(2):113-136. (TAO Ran,DENG Bing,WANG Yue. Research progress of fractional Fourier transform in signal processing[J]. Science in China Ser. E Information Science, 2006,36(2):113-136.)
- [5] 刘小强. 基于压缩感知的线性调频雷达信号截获方法[J]. 太赫兹科学与电子信息学报, 2014,12(2):202-207. (LIU Xiaoqiang. Interception of linear frequency modulated radar signal based on compressed sensing[J]. Journal of Terahertz Science and Electronic Information Technology, 2014,12(2):202-207.)
- [6] TROPP J A,GILBERT A C. Signal recovery from partial information via orthogonal matching pursuit[EB/OL]. [2005-04-13]. <http://www-personal.umich.edu/~jtropp/papers/TG05-Signal-Recovery.pdf>.
- [7] DONOHO D L,TSAIG Y,DRORI I,et al. Sparse solution of underdetermined linear equations by stagewise orthogonal matching pursuit[R]. Technical Report, 2006.
- [8] NEEDDELL D,VERSHYNIN R. Signal recovery from incomplete and inaccurate measurements via regularized orthogonal matching pursuit[EB/OL].[2016-08-24]. <http://www.math.ucdavis.edu/%7Evershynin/papers/ROMP-stability.pdf>.
- [9] GILBERT A C,STRAUSS M J,TROPP J A,et al. One sketch for all:fast algorithms for compressed sensing[C]// Proceedings of the 39th annual ACM symposium on theory of computing. New York:Association for Computing Machinery, 2007:237-246.

## 作者简介:



陈旗(1974-),男,安徽省宣城市人,副教授,主要研究方向为信号与信息处理.email: lichenbiqu@163.com.

曹汉强(1953-),武汉市人,男,教授,博士生导师,主要研究方向为信号与信息处理.

左炜(1979-),武汉市人,男,博士,讲师,主要研究方向为信号与信息处理.