

文章编号: 2095-4980(2018)03-0423-08

## 基于 D-optimality 准则的多输入多输出雷达阵列设计

顾帅楠, 郑娜娥, 秦文利

(信息工程大学 导航与空天目标工程学院, 河南 郑州 450002)

**摘要:** 为了最小化参数估计的均方误差, 提出了基于 D-optimality 准则(DOBC)的多输入多输出雷达天线几何设计方法。严格推导了天线几何在 DOBC 准则下需要满足的约束条件; 进行了敏感性分析, DOBC 准则下的天线几何只与目标方位角之差有关, 而与具体的方位角值无关; 并推导了远场条件下参数估计的克拉美罗界(CRLB), DOBC 准则可以看成一种修正的 CRLB, 其为最大似然估计算法提供了更严格的下界约束。仿真结果表明, 与最小冗余阵列、均匀阵列相比, DOBC 准则下的天线几何具有更优越的参数估计性能, 且其不受阵列孔径的约束, 可以通过扩大孔径, 进一步提高分辨率。但随着孔径的提高, 方向图的伪峰值会升高, 在低信噪比条件下, 会造成很大的参数估计误差, 因此需要根据实际应用需求, 选择合适的孔径大小。

**关键词:** 多输入多输出雷达; 天线几何; D-optimality 准则; 敏感性; 克拉美罗界

**中图分类号:** TN957.51

**文献标志码:** A

**doi:** 10.11805/TKYDA201803.0423

## Antenna array design for MIMO radar based on D-optimality

GU Shuainan, ZHENG Nae, QIN Wenli

(Institute of Navigation and Space Target Engineering, Information Engineering University, Zhengzhou Henan 450002, China)

**Abstract:** An antenna geometry design method of Multiple-Input Multiple-Output(MIMO) radar based on D-optimality Criterion(DOBC) is proposed in order to minimize Mean Square Error(MSE) of the estimations. Firstly, the constraints of DOBC designs are derived; then, the sensitivity properties of the DOBC designs are analyzed, which are only affected by the separation of the targets and are independent of the azimuth of targets; the Cramer-Rao Lower Bound(CRLB) of the estimations in the far field condition is also deduced. DOBC criteria can be looked as the modified CRLB and provides a tighter bound for performance measure of the Maximum Likelihood Estimate(MLE) algorithm. Simulation results demonstrate that compared with minimum redundancy arrays and uniform arrays, DOBC designs have better performance in parameter estimation. Furthermore, it is not restricted by the array aperture. As the aperture increases, the resolution will be improved and the spurious peaks will become higher at the same time, which will result in a very large error in the DOA estimation with low SNR. Therefore, an appropriate aperture must be chosen according to the physical requirements.

**Keywords:** Multiple-Input Multiple-Output(MIMO) radar; antenna geometry; D-optimality; sensitivity; Cramer-Rao Lower Bound(CRLB)

近年来, 多输入多输出(MIMO)雷达成为雷达界的研究热点。根据 MIMO 雷达的结构, 通常划分为集中式 MIMO 雷达和分布式 MIMO 雷达<sup>[1]</sup>。分布式 MIMO 雷达通过获得分集增益克服目标的雷达散射截面(Radar-Cross Section, RCS)闪烁, 提高了目标检测和参数估计的性能<sup>[2]</sup>; 集中式 MIMO 雷达通过扩大虚拟阵列的孔径获得更大的自由度<sup>[3]</sup>。本文主要针对集中式 MIMO 雷达展开讨论。目前一些研究都是通过优化发射波形或者改进数据处理的算法来提高系统的各种性能。然而, 从某种意义上讲, 天线阵列结构是最重要的, 是直接决定系统性能的关键因素。通过优化天线几何结构, 能够从根本上提高 MIMO 雷达系统的相关性能。陆珉对 MIMO 雷达的等效阵列进行了讨论, 以波达方向估计精确度为准则, 通过抛物线理论得出了收发组合的唯一性和合理性, 在不同场景下, 推导了 MIMO 雷达收发阵列最佳设计的解析解<sup>[4]</sup>。在目标定位方面, A A Gorji 展开了一系列研究:

2010年,利用目标运动的先验知识增加了分辨单元内可检测的目标数<sup>[5]</sup>;2012年,针对单目标定位与跟踪展开研究,推导了目标定位的克拉美罗界,并以此作为目标函数,通过优化阵列结构,得到具有最优定位性能的MIMO雷达系统<sup>[6]</sup>。2014年,考虑多目标定位与跟踪,建立代价函数,用基于采样的算法解决该非凸问题<sup>[6-7]</sup>。在参数估计方面,陈浩文建立了集中式MIMO雷达目标参数估计性能分析的基本理论框架,研究了参数估计去耦合的天线几何策略<sup>[8]</sup>;针对有无优先探测的区域先验消息,分别以均方角误差界和平均克拉美罗界为准则设计MIMO雷达天线几何<sup>[8]</sup>;并结合信息理论知识,以信道容量最大为准则对MIMO雷达发射功率以及天线几何同时进行了优化<sup>[9]</sup>。

然而在实际应用中,当多目标相距很近时,测向问题会变得非常棘手,但准确测出该多目标的方位又是迫切需要的<sup>[10-11]</sup>。因此本文将方位估计的均方误差(即方差,此处用无偏估计)看成衡量系统性能的测度,基于此,提出了一种基于D-optimality准则的MIMO雷达天线几何设计方法。

## 1 信号模型及最大似然测向算法

假设集中式MIMO雷达有 $M$ 个发射阵元, $N$ 个接收阵元,收发阵列布置紧凑。发射的正交波形为 $\mathbf{s}=[s_1, s_2, \dots, s_M]^T$ ,即 $\mathbf{R}=\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \mathbf{s}(l)\mathbf{s}^H(l)=\mathbf{I}_M$ ,其中 $L$ 为快拍数, $\mathbf{I}_M$ 为 $M$ 阶的单位矩阵。 $K$ 个远场目标的波达方向与波离方向近似相同,设为矢量 $\boldsymbol{\theta}$ , $\boldsymbol{\theta}=(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_K)$ 。那么接收信号可以表示为:

$$\mathbf{z}(l)=\sum_{i=1}^K \alpha_i \mathbf{A}(\theta_i, \boldsymbol{\beta}) \mathbf{s}(l)+\mathbf{e}(l), \quad l=1, 2, \dots, L \quad (1)$$

式中: $\mathbf{z}(l) \in \mathbb{C}^{N \times 1}$ 为接收数据矢量; $\{\alpha_i\}_1^K$ 为未知的目标复反射幅度,与目标的RCS有关; $\mathbf{A}(\theta_i, \boldsymbol{\beta})=\mathbf{a}_r(\theta_i)\mathbf{a}_t^T(\theta_i)$ ,其中 $\mathbf{a}_t$ 为发射导向矢量, $\mathbf{a}_r$ 为接收导向矢量,矢量 $\boldsymbol{\beta}$ 为与阵列结构有关的参数,表示阵元的位置信息, $\theta_i$ 为第 $i$ 个目标的方位角; $\mathbf{s}(l) \in \mathbb{C}^{M \times 1}$ 为发射波形矢量; $\mathbf{e}(l) \in \mathbb{C}^{N \times 1}$ 为干扰加噪声矢量,为了简单起见,考虑零均值的高斯白噪声,即 $\mathbf{R}_e=\sigma^2 \mathbf{I}_M$ ,其中 $\mathbf{R}_e$ 为高斯白噪声的协方差矩阵, $\sigma^2$ 为高斯白噪声的方差。通过将接收数据同发射信号做匹配滤波,得

$$\boldsymbol{\eta} \triangleq \text{vec} \left[ \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{l=1}^L \mathbf{z}(l)\mathbf{s}^H(l) \right] \approx \sum_{i=1}^K \alpha_i \mathbf{d}(\theta_i, \boldsymbol{\beta}) + \mathbf{v} \quad (2)$$

式中: $\mathbf{v}=\frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{l=1}^L \mathbf{e}(n) \otimes \mathbf{s}(l) \sim CN(0, \sigma^2 \mathbf{I}_{MN})$ ;  $\mathbf{d}(\theta_i, \boldsymbol{\beta}) \triangleq \sqrt{L} \text{vec}[\mathbf{A}(\theta_i, \boldsymbol{\beta})]$ 。

式(2)的模型用矩阵形式可以表示为:

$$\tilde{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\beta}) \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{v} \quad (3)$$

式中: $\mathbf{D}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\beta})=[\mathbf{d}(\theta_1, \boldsymbol{\beta}), \mathbf{d}(\theta_2, \boldsymbol{\beta}), \dots, \mathbf{d}(\theta_K, \boldsymbol{\beta})]$ ;  $\boldsymbol{\alpha}=[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_K]^T$ 。

用最大似然估计算法对目标方位角进行估计

$$(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\alpha}})_{ML} = \arg \min_{\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}} \|\tilde{\boldsymbol{\eta}} - \mathbf{D}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\beta}) \boldsymbol{\alpha}\|^2 \quad (4)$$

式中 $\boldsymbol{\alpha}$ 的求解是一个常见的最小二乘问题:

$$\boldsymbol{\alpha} = (\mathbf{D}^H \mathbf{D})^{-1} \mathbf{D}^H \tilde{\boldsymbol{\eta}} \quad (5)$$

将式(5)代入式(4), $\boldsymbol{\theta}$ 的最大似然估计为

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{ML} = \arg \max_{\boldsymbol{\theta}} L(\boldsymbol{\theta}) \quad (6)$$

式中: $L(\boldsymbol{\theta})=tr\{\mathbf{P}_D \hat{\mathbf{R}}_0\}$ ,  $\mathbf{P}_D(\boldsymbol{\theta}) \triangleq \mathbf{D}(\mathbf{D}^H \mathbf{D})^{-1} \mathbf{D}^H$ ,  $\hat{\mathbf{R}}_0 = \tilde{\boldsymbol{\eta}} \tilde{\boldsymbol{\eta}}^H$ 。为了简单起见,将 $\mathbf{D}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\beta})$ 记为 $\mathbf{D}$ 。

## 2 天线几何设计

天线几何设计的目的是通过合理设置收发阵列的阵元位置,使MIMO雷达系统性能最优。正如引言中所述,不同的阵列设计准则传达了不同的物理含义。考虑到本文是为了得到最优的方位角估计精确度,采用最大似然估计的均方误差作为目标函数。

## 2.1 D-optimality 准则

D-optimality 表示最小化最优线性无偏估计(best linear unbiased estimate)的均方误差, 简称 DOBC 准则, 为了叙述简洁, 下文中均称为 DOBC, 定义如下<sup>[12]</sup>:

$$\boldsymbol{\beta} = \arg \left\{ \min_{\hat{\boldsymbol{\theta}}} \det \left[ \boldsymbol{\Omega}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \right] \right\} \quad (7)$$

式中:  $\det[\cdot]$  为行列式的值; 矢量  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  为参数  $\boldsymbol{\theta}$  的估计值;  $\boldsymbol{\Omega}(\hat{\boldsymbol{\theta}})$  为估计值  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  的方差矩阵。在无偏估计中, 参数估计的偏差都为 0, 均方误差分别退化为各自的方差。

在阵列设计的实际应用中,  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  为远场目标方位角的估计值,  $\boldsymbol{\beta}$  为与阵列结构相关的参数矢量。通过合理布置阵元的位置, 最小化  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  的方差, 使目标方位角  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  的高维联合置信区域的体积最小; 另一方面来看,  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  的方差越小, 说明  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  更密集地聚集在真值附近。在这种意义上, 该阵列的参数估计性能是最优的。明显地, DOBC 准则下的阵列设计, 关键在于推导估计值  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  的方差。

## 2.2 DOBC 准则下的 MIMO 雷达天线几何条件推导

用最大似然法对方位角进行估计, 进而再求取参数估计值的方差, 具体过程如下: 定义  $y_i = \frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i}$  ( $i=1,2,\dots,K$ ), 以向量形式表示记为  $\mathbf{y}(\boldsymbol{\theta}) = (y_1, y_2, \dots, y_K)^T$ 。假设最大似然法求得的估计值为  $\boldsymbol{\theta}_0$ , 因此在高信噪比的情况下, 有  $\mathbf{y}(\boldsymbol{\theta}_0) \approx 0$ 。将  $\mathbf{y}(\boldsymbol{\theta})$  在  $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0$  处泰勒展开, 忽略高次项得:

$$\mathbf{y}(\boldsymbol{\theta}) \approx \mathbf{y}(\boldsymbol{\theta}_0) + \left. \frac{\partial \mathbf{y}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right|_{\boldsymbol{\theta}_0} (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_0) \approx \left. \frac{\partial \mathbf{y}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right|_{\boldsymbol{\theta}_0} (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_0) \quad (8)$$

记  $\mathbf{T} = \left. \frac{\partial \mathbf{y}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right|_{\boldsymbol{\theta}_0}$ ,  $\mathbf{T}$  为  $L(\boldsymbol{\theta})$  的 Hessian 矩阵, 在较高信噪比或者较高快拍数的情况下, 有

$$\mathbf{T} = \left. \frac{\partial \mathbf{y}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right|_{\boldsymbol{\theta}_0} \approx E \left\{ \left. \frac{\partial \mathbf{y}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right|_{\boldsymbol{\theta}_0} \right\} \quad (9)$$

根据式(8)和式(9), 得  $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0 + \mathbf{T}^{-1} \mathbf{y}$ , 由此,

$$E\{\boldsymbol{\theta}\} = \boldsymbol{\theta}_0 + \mathbf{T}^{-1} E\{\mathbf{y}\} = \boldsymbol{\theta}_0 \quad (10)$$

$$\boldsymbol{\Omega}_{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{T}^{-1} E\{\mathbf{y}\mathbf{y}^T\} \mathbf{T}^{-1} \quad (11)$$

为了得到  $\boldsymbol{\Omega}_{\boldsymbol{\theta}}$ , 分别计算  $E\{\mathbf{y}\mathbf{y}^T\}$  和  $\mathbf{T}$ 。

1)  $E\{\mathbf{y}\mathbf{y}^T\}$  的推导

$$y_i = \frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i} = -\text{tr} \left\{ \frac{\partial \mathbf{P}_{\mathbf{D}}}{\partial \theta_i} \hat{\mathbf{R}}_0 \right\} \quad (12)$$

式中:  $\frac{\partial \mathbf{P}_{\mathbf{D}}}{\partial \theta_i} = -\frac{\partial}{\partial \theta_i} \left[ \mathbf{D}(\mathbf{D}^H \mathbf{D})^{-1} \mathbf{D}^H \right] = -\left\{ \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \theta_i} \left[ (\mathbf{D}^H \mathbf{D})^{-1} \mathbf{D}^H \right] - \mathbf{D}(\mathbf{D}^H \mathbf{D})^{-1} \frac{\partial \mathbf{D}^H}{\partial \theta_i} \mathbf{D}(\mathbf{D}^H \mathbf{D})^{-1} \mathbf{D}^H - \mathbf{D}(\mathbf{D}^H \mathbf{D})^{-1} \mathbf{D}^H \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \theta_i} (\mathbf{D}^H \mathbf{D})^{-1} \mathbf{D}^H + \mathbf{D}(\mathbf{D}^H \mathbf{D})^{-1} \frac{\partial \mathbf{D}^H}{\partial \theta_i} \right\} = -\left\{ (\mathbf{I} - \mathbf{P}_{\mathbf{D}}) \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \theta_i} \left[ (\mathbf{D}^H \mathbf{D})^{-1} \mathbf{D}^H \right] + \mathbf{D}(\mathbf{D}^H \mathbf{D})^{-1} \frac{\partial \mathbf{D}^H}{\partial \theta_i} (\mathbf{I} - \mathbf{P}_{\mathbf{D}}) \right\}$ 。

在上述公式的推导中, 用了如下关系<sup>[13]</sup>:  $\frac{\partial \mathbf{H}^{-1}}{\partial x} = -\mathbf{H}^{-1} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x} \mathbf{H}^{-1}$ , 在本文中,  $\mathbf{H} = \mathbf{D}^H \mathbf{D}$ 。

定义  $\mathbf{B}_i = (\mathbf{I} - \mathbf{P}_{\mathbf{D}}) \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \theta_i} \left[ (\mathbf{D}^H \mathbf{D})^{-1} \mathbf{D}^H \right]$ , 那么  $\mathbf{B}_i^H = \mathbf{D}(\mathbf{D}^H \mathbf{D})^{-1} \frac{\partial \mathbf{D}^H}{\partial \theta_i} (\mathbf{I} - \mathbf{P}_{\mathbf{D}})$ , 因此有  $\frac{\partial \mathbf{P}_{\mathbf{D}}}{\partial \theta_i} = -(\mathbf{B}_i + \mathbf{B}_i^H)$ ,  $y_i = 2\text{Re}\{\text{tr}\{\mathbf{B}_i \hat{\mathbf{R}}_0\}\}$ 。从而可以得到

$$E\{\mathbf{y}\mathbf{y}^T\} = 4E\left\{\text{Re}\left\{\text{tr}\left\{\mathbf{B}_i \hat{\mathbf{R}}_0\right\}\right\} \text{Re}\left\{\text{tr}\left\{\mathbf{B}_j \hat{\mathbf{R}}_0\right\}\right\}\right\} \quad (13)$$

2)  $\mathbf{T}$  的推导

$$\mathbf{T} = \left. \frac{\partial \mathbf{y}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right|_{\boldsymbol{\theta}_0} = 2E\left\{\text{Re}\left\{\text{tr}\left\{\frac{\partial \mathbf{B}_i}{\partial \theta_j} \hat{\mathbf{R}}_0\right\}\right\}\right\} = 2L\text{Re}\left\{\text{tr}\left\{\frac{\partial \mathbf{B}_i}{\partial \theta_j} \hat{\mathbf{R}}_0\right\}\right\} = 2L\text{Re}\left\{\text{tr}\left\{\mathbf{C}_{ij} \hat{\mathbf{R}}_0\right\}\right\} \quad (14)$$

式中  $C_{ij} = -\frac{\partial P_D}{\partial \theta_j} \frac{\partial D}{\partial \theta_i} \left[ (D^H D)^{-1} D^H \right] + (I - P_D) \frac{\partial D}{\partial \theta_i} (D^H D)^{-1} \frac{\partial D^H}{\partial \theta_j} (I - P_D)$ 。

综合式(13)和式(14),

$$\Omega(\hat{\theta}) = \frac{1}{L^2} \left[ \text{Re} \left\{ \text{tr} \left\{ C_{ij} \hat{R}_0 \right\} \right\} \right]^{-1} E \left\{ \text{Re} \left\{ \text{tr} \left\{ B_i \hat{R}_0 \right\} \right\} \text{Re} \left\{ \text{tr} \left\{ B_j \hat{R}_0 \right\} \right\} \right\} \left[ \text{Re} \left\{ \text{tr} \left\{ C_{ij} \hat{R}_0 \right\} \right\} \right]^{-1} \quad (15)$$

通过推导估计参数  $\hat{\theta}$  的方差, 建立基于 DOBC 准则的 MIMO 雷达天线几何设计模型:

$$\beta = \arg \left\{ \min_{\beta} \det \left[ \Omega(\hat{\theta}) \right] \right\} \text{ s.t. } \Omega(\hat{\theta}) = \frac{1}{L^2} \left[ \text{Re} \left\{ \text{tr} \left\{ C_{ij} \hat{R}_0 \right\} \right\} \right]^{-1} E \left\{ \text{Re} \left\{ \text{tr} \left\{ B_i \hat{R}_0 \right\} \right\} \text{Re} \left\{ \text{tr} \left\{ B_j \hat{R}_0 \right\} \right\} \right\} \left[ \text{Re} \left\{ \text{tr} \left\{ C_{ij} \hat{R}_0 \right\} \right\} \right]^{-1} \quad (16)$$

### 2.3 敏感性分析

由式(16)看出, 基于 DOBC 准则的 MIMO 雷达天线几何设计与目标的个数、方位角以及阵列结构有关, 这就降低了此准则下所设计的 MIMO 雷达天线几何的普遍适用性。在实际中, 需保证所设计的阵列对于所有的目标而言, 参数估计性能都是最优的或者接近最优的。给出一个定理: 高斯白噪声的环境中, DOBC 准则下的天线几何设计只与目标方位角之间的差值有关, 而与具体的方位角值无关, 在本节会给出相应的证明。因此, 只需保证当目标相距较近时, 设计出具有最优的参数估计性能的 MIMO 雷达系统。那么, 当目标相距较远时, 该系统依然是次优的, 能较好地估计出目标的方位角。

下面对所提出的定理进行证明: 假设在每个目标的方位角上都存在一个相同的角度扰动  $\theta_\Delta$ , 则目标之间的角度差不变, 那么信号模型变为:

$$\tilde{\eta} = \Delta D(\theta, \beta) \alpha + \nu \quad (17)$$

式中:  $\Delta = \begin{bmatrix} e^{jd_1 \sin \theta_\Delta} & & & \\ & e^{jd_2 \sin \theta_\Delta} & & \\ & & \vdots & \\ & & & e^{jd_{MN} \sin \theta_\Delta} \end{bmatrix}_{MN \times MN}$ 。即证明 DOBC 准则与角度扰动值  $\theta_\Delta$  无关。此时,

$$P_D' \triangleq \Delta D (D^H \Delta^H \Delta D)^{-1} D^H \Delta^H = \Delta P_D \Delta^H \quad (18)$$

$$C_{ij}' = -\Delta \frac{\partial P_D}{\partial \theta_j} \Delta^H \Delta \frac{\partial D}{\partial \theta_i} \left( (D^H \Delta^H \Delta D)^{-1} D^H \Delta^H \right) + (I - \Delta P_D \Delta^H) \Delta \frac{\partial D}{\partial \theta_i} (D^H \Delta^H \Delta D)^{-1} \frac{\partial D^H}{\partial \theta_j} \Delta^H (I - \Delta P_D \Delta^H) =$$

$$-\Delta \frac{\partial P_D}{\partial \theta_j} \frac{\partial D}{\partial \theta_i} \left( (D^H D)^{-1} D^H \Delta^H \right) + \Delta \frac{\partial D}{\partial \theta_i} (D^H D)^{-1} \frac{\partial D^H}{\partial \theta_j} \Delta^H - \Delta \frac{\partial D}{\partial \theta_i} (D^H D)^{-1} \frac{\partial D^H}{\partial \theta_j} P_D \Delta^H -$$

$$\Delta P_D \frac{\partial D}{\partial \theta_i} (D^H D)^{-1} \frac{\partial D^H}{\partial \theta_j} \Delta^H + \frac{\partial D}{\partial \theta_i} (D^H D)^{-1} \frac{\partial D^H}{\partial \theta_j} \Delta^H P_D \Delta^H \quad (19)$$

$$\hat{R}_0' = \Delta D D^H \Delta^H + \sigma^2 I \quad (20)$$

$$B_i' = (I - P_D') \frac{\partial D'}{\partial \theta_i} \left[ (D'^H D')^{-1} D'^H \right] = (I - \Delta P_D \Delta^H) \Delta \frac{\partial D}{\partial \theta_i} \left[ (D^H \Delta^H \Delta D)^{-1} D^H \Delta^H \right] =$$

$$\Delta \frac{\partial D}{\partial \theta_i} \left[ (D^H D)^{-1} D^H \Delta^H \right] - \Delta P_D \frac{\partial D}{\partial \theta_i} \left[ (D^H D)^{-1} D^H \Delta^H \right] \quad (21)$$

讨论  $\Omega(\hat{\theta})$  随扰动值  $\theta_\Delta$  的变化情况, 即分别讨论  $T$  和  $E\{yy^T\}$  对  $\theta_\Delta$  的敏感性。

1)  $T$  对扰动值  $\theta_\Delta$  的敏感性

将式(19)和式(20)代入  $C_{ij}' \hat{R}_0'$  得到

$$C_{ij}' \hat{R}_0' = \left\{ -\Delta \frac{\partial P_D}{\partial \theta_j} \frac{\partial D}{\partial \theta_i} \left[ (D^H D)^{-1} D^H \Delta^H \right] + \Delta \frac{\partial D}{\partial \theta_i} (D^H D)^{-1} \frac{\partial D^H}{\partial \theta_j} \Delta^H - \Delta \frac{\partial D}{\partial \theta_i} (D^H D)^{-1} \frac{\partial D^H}{\partial \theta_j} P_D \Delta^H + \right.$$

$$\left. \Delta \frac{\partial D}{\partial \theta_i} (D^H D)^{-1} \frac{\partial D^H}{\partial \theta_j} \Delta^H P_D \Delta^H \right\} (\Delta D D^H \Delta^H + \sigma^2 I) - \Delta P_D \frac{\partial D}{\partial \theta_i} (D^H D)^{-1} \frac{\partial D^H}{\partial \theta_j} \Delta^H \quad (22)$$

式中每一项都是  $\Delta \{ \dots \} \Delta^H$  的结构, 根据矩阵迹的性质:  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ , 从而可以得到  $\text{tr}(\Delta \{ \dots \} \Delta^H) = \text{tr}(\{ \dots \} \Delta^H \Delta) = \text{tr}\{ \dots \}$ 。因此  $T$  不受扰动值  $\theta_\Delta$  的影响。

2)  $E\{\mathbf{y}\mathbf{y}^T\}$  对扰动值  $\theta_\Delta$  的敏感性

将式(20)和式(21)代入  $\mathbf{B}_i^T \hat{\mathbf{R}}_0$  得到

$$\mathbf{B}_i^T \hat{\mathbf{R}}_0 = \left[ \mathbf{A}(\mathbf{I} - \mathbf{P}_0) \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \theta_i} \left[ (\mathbf{D}^H \mathbf{D})^{-1} \mathbf{D}^H \mathbf{A}^H \right] \right] (\Delta \mathbf{D} \mathbf{D}^H \mathbf{A}^H + \sigma^2 \mathbf{I}) \quad (23)$$

与式(22)类似, 每一项都是  $\mathbf{A}\{\dots\}\mathbf{A}^H$  的结构, 同理  $\mathbf{B}_i^T \hat{\mathbf{R}}_0$  不受扰动值  $\theta_\Delta$  的影响, 因此  $E\{\mathbf{y}\mathbf{y}^T\}$  也不受扰动值  $\theta_\Delta$  的影响。

综上所述, DOBC 准则下的 MIMO 雷达天线几何设计与目标的方位角无关, 只与目标方位角之间的差有关。基于 DOBC 准则的 MIMO 雷达几何天线设计步骤为: a) 确定好 MIMO 雷达收发阵列的阵元个数; b) 根据系统要求的测角的最小分辨力, 确定目标的方位角  $\theta$ ; c) 根据系统性能要求、实际的信噪比以及物理限制等确定等效阵列的孔径; d) 基于 DOBC 准则, 运用穷举法进行天线几何设计。

虽然穷举搜索的方法会带来较高的算法复杂度, 但是复杂度在天线几何设计中不是关键要素。这不同于具体的测向算法, 假如 MUSIC 和 ESPRIT 等测向算法复杂度较高, 则会给每次的测向带来很大的运算代价。而天线几何设计关系到整个 MIMO 雷达测向系统的性能, 若能通过较高复杂度的算法合理布置好收发阵列的位置, 在实际中也是非常值得的, 这是一个一劳永逸的过程, 阵元位置一旦设定, 基本不会再有变动。

## 2.4 克拉美罗界的推导

CRLB 给出了任何无偏估计的参数的均方误差的下界, 根据文献[14], Fisher 信息矩阵为:

$$p(\mathbf{X}|\boldsymbol{\theta}) = c \exp\{-tr\{\mathbf{P}_0 \hat{\mathbf{R}}_0\}\} \quad (24)$$

式中  $c$  为常数。因此可得:

$$\mathbf{J}_L = - \left[ E \left\{ \frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{X}|\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right\} \right] = - \left[ -L tr \left\{ \frac{\partial^2 \mathbf{P}_0}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \hat{\mathbf{R}}_0 \right\} \right] \quad (25)$$

所以参数估计的 CRLB 为

$$CRLB_{\theta\theta} = \frac{1}{2L} \left[ \text{Re} \left\{ tr \left\{ \mathbf{C}_{ij} \hat{\mathbf{R}}_0 \right\} \right\} \right]^{-1} \quad (26)$$

由式(15)明显可以看出,  $\boldsymbol{\Omega}(\hat{\boldsymbol{\theta}})$  的第 1 项为参数估计的 CRLB, 其余 2 项可以视为调整因子, 因此可以看作一种修正的 CRLB。相对于 CRLB 而言,  $\boldsymbol{\Omega}(\hat{\boldsymbol{\theta}})$  能够更详细、更准确地描述最大似然估计的性能。在信噪比较高的情况下,  $\boldsymbol{\Omega}(\hat{\boldsymbol{\theta}})$  的后 2 项接近等于单位矩阵,  $\boldsymbol{\Omega}(\hat{\boldsymbol{\theta}})$  与 CRLB 非常接近。

## 3 仿真实验

均匀阵列因其假设方式简单, 结构对称, 在 MIMO 雷达中得到了广泛应用, 然而其对空间的利用率较低, 因此非均匀阵列得到了发展, 非均匀阵列能够有效增大阵列孔径, 其中最小冗余阵列是很重要的一类阵列。本文分别针对 DOBC 准则下的阵列、均匀阵列、最小冗余阵列进行参数估计性能的对比。

**实验 1:** 若系统为收发同置的 MIMO 雷达, 即收发阵列为同一阵列时, 讨论在零均值高斯白噪声下, 有 2 个相距较近的目标, 目标方位角之差为对应的均匀阵列的方向图的主瓣宽度。在每个信噪比条件下, 做了 500 次蒙特卡罗仿真。分别与均匀阵列以及相同孔径的最小冗余阵列的性能进行对比。为衡量系统的参数估计性能,

采用参数  $\boldsymbol{\theta}$  的均方误差来定义该估计子与真实参数的误差平方的期望值, 即  $M^2(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K E \left\{ (\hat{\theta}_k - \theta_k)^2 \right\}$ 。表 1 是 3 种阵列设计下的阵元位置。图 1 和图 2 分别是阵元数为 4 和 6 的阵列设计的参数估计均方误差对比图。

从图 1 和图 2 可以看出, DOBC 准则的 MIMO 雷达阵列的参数估计性能最好, 最小冗余阵列次之, 均匀阵列的性能相对较差; 信噪比越高, 估计参数的均方误差越小, 估计精确度也就越高; 当阵元数增多时, 3 种阵列体制下的参数估计的均方误差都有所下降。这是因为阵元数增多时, 所形成的虚拟阵列的孔径也增大, 自由度更大, 参数估计性能都有所提升; 在信噪比达到 2 dB 左右时, DOBC 准则下 MIMO 雷达参数估计的均方误差接近于 CRLB, 由上节推导, 可以将其看作是修正的 CRLB。这些结论也同样适用于收发分置的 MIMO 雷达。DOBC 准则下的收发分置 MIMO 雷达的阵元布置更加灵活, 可以任意组合收发阵列阵元数。

表 1 三种阵列设计的阵元位置  
Table1 Antenna positions of three array designs

number of antennas	uniform array	minimum redundancy array	DOBC array
3	(0,1,2)	(0,1,4)	(0,3,4)
4	(0,1,2,3)	(0,1,4,6)	(0,1,5,6)
5	(0,1,2,3,4)	(0,1,4,6,13)	(0,1,7,12,13)
6	(0,1,2,3,4,5)	(0,1,4,6,13,21)	(0,1,12,19,20,21)

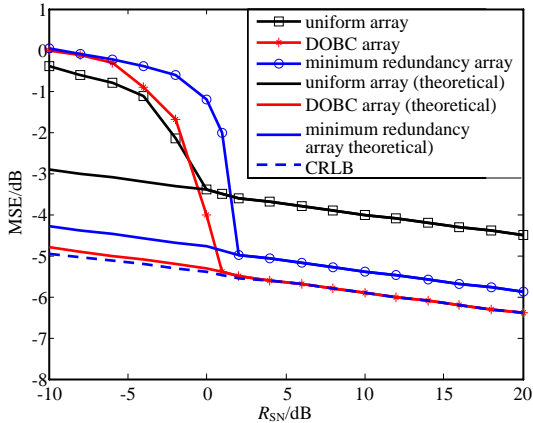


Fig.1 Mean square error of various arrays when M=4  
图 1 阵元数为 4 的阵列参数估计均方误差

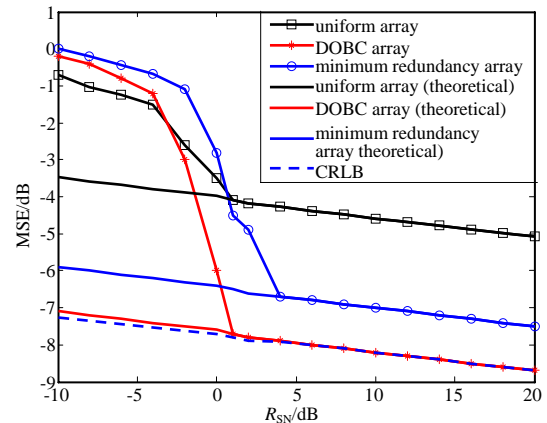


Fig.2 Mean square error of various arrays when M=6  
图 2 阵元数为 6 的阵列参数估计均方误差

**实验 2:** 在实验 1 中, 最小冗余 MIMO 雷达和 DOBC 准则下的 MIMO 雷达的虚拟阵列的孔径是一样的。最小冗余阵列的阵元数一旦确定, 阵列孔径也随之确定。而 DOBC 准则下的 MIMO 雷达不受此限制。这个性质有特别重要的意义: a) 虚拟阵列的孔径越大, 则分辨力越高; b) DOBC 准则下的 MIMO 雷达阵列可以灵活地根据系统设计要求或者物理条件确定阵列孔径的大小。为了进一步研究孔径对参数估计性能的影响, 以收发同置的 4 阵元 MIMO 雷达为例, 表 2 列出了不同的虚拟阵列孔径对应的 DOBC 准则下的阵元位置, 以及理论估计方差。图 3 是参数估计均方误差随虚拟阵列孔径的变化曲线图, 由图看出, 随着虚拟阵列孔径的变大, 参数估计均方误差不断变小, 但是图中出现了 2 段较为平坦的曲线, 分别为 16 到 20 和 30 到 50, 称其为“门限效应”, 指的是达到一定的孔径以后, 参数估计的均方误差变化很慢, 以扩大孔径为代价带来的均方误差减小的现象不是很明显。当孔径由 12 扩大到 16 时, 估计均方误差提高了 4.5 dB; 而由 16 扩大到 20 时, 估计均方误差只提高了 0.7 dB; 由 30 扩大到 50 时, 估计均方误差只提高了 1.97 dB。这对实际阵列中虚拟孔径的选择有很大的指导意义: a) 希望能够增大孔径降低理论参数估计均方误差(在理论上, 孔径越大, 参数估计的均方误差越小); b) 尽量避免门限效应。因此, 一般把门限效应的起始值作为孔径的选择, 如图 3 中的 16 或者 30。

表 2 不同虚拟阵列孔径对应的 DOBC 准则下的阵元位置  
Table2 Antenna positions of DOBC designs for different apertures

aperture	antenna positions	equivalent antenna positions	variance/dB
12	(0,1,4,6)	(0,1,2,4,5,6,7,8,10,12)	-10.98
14	(0,1,4,7)	(0,1,2,4,5,7,8,11,14)	-12.18
16	(0,1,4,8)	(0,1,2,4,5,8,9,12,16)	-15.48
18	(0,1,8,9)	(0,1,2,8,9,10,16,17,18)	-15.70
20	(0,1,8,10)	(0,1,2,9,10,11,18,19,20)	-16.18
24	(0,1,11,12)	(0,1,2,11,12,13,22,23,24)	-16.61
26	(0,1,11,13)	(0,1,2,11,12,13,14,22,24,26)	-18.60
30	(0,1,14,15)	(0,1,2,14,15,16,28,29,30)	-20.71
50	(0,1,24,25)	(0,1,2,24,25,26,48,49,50)	-22.38

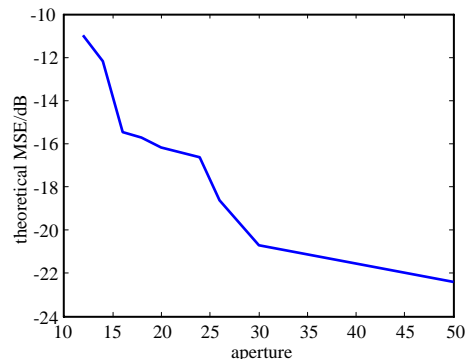


Fig.3 Mean square error versus the array aperture  
图 3 估计均方误差随孔径变化情况

图 4 分别描述了在信噪比为 10 dB 时, 孔径为 12,16,24,30 的阵列方向图。由图中可以看出, 随着孔径的增大, 方向图中的伪峰越来越高, 将由于伪峰造成的错误的参数估计称为错误估计。图 5 描述了错误估计概率随着孔径的变化图, 可以看出, 在信噪比较低的情况下, 孔径大的阵列会发生很高的错误概率。因此, 若要将错误估计概率控制在一定的范围, 必须提高信噪比或者降低虚拟阵列的孔径值。

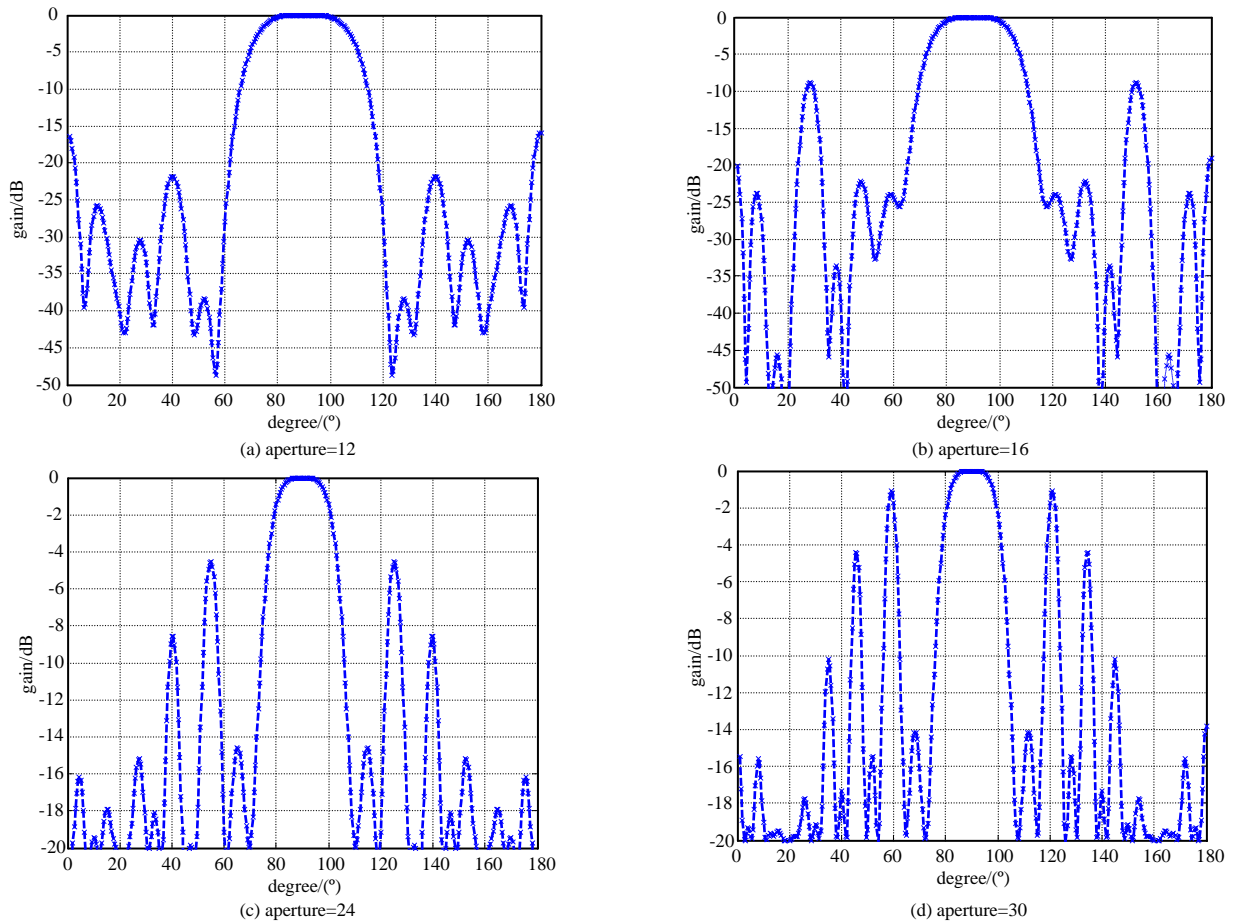


Fig.4 Spurious peaks versus the array aperture  
图4 伪峰随阵列孔径的变化图

#### 4 结论

关于参数估计的算法研究已有很多, 本文从本质上入手, 从系统参数估计性能的角度出发, 提出了一种基于DOBC准则的MIMO雷达天线几何设计方法。分别通过理论推导和仿真实验验证了方法的有效性。与较常用的均匀阵列以及最小冗余阵列进行对比, 在该准则下, 参数估计的均方误差具有最小的置信区域, 并且能灵活地设计孔径大小。随着孔径的增大, 估计性能会提高, 但是方向图的伪峰也会升高, 因此应根据实际需要选择合适的孔径大小。通过推导, DOBC准则可以看成一种修正的CRLB。尽管本文所提的设计准则需要预先知道参考的目标方位角, 但该方法对方位角并不敏感, 只与目标方位角的差有关。下一步研究中, 将进一步考虑把DOBC准则推广到其他阵型。

#### 参考文献:

[ 1 ] ALEX E F, HAIMOVICH A M, BLUM R S, et al. MIMO radar: an idea whose time has come[J]. Radar Conference Proceedings of the IEEE, 2004, 7(6): 71-78.  
 [ 2 ] HAIMOVICH A M, BLUM R S, CIMINI L J. MIMO radar with widely separated antennas[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2008, 25(1): 116-129.  
 [ 3 ] LI J, STOICA P. MIMO radar with colocated antennas[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2007, 24(5): 106-114.

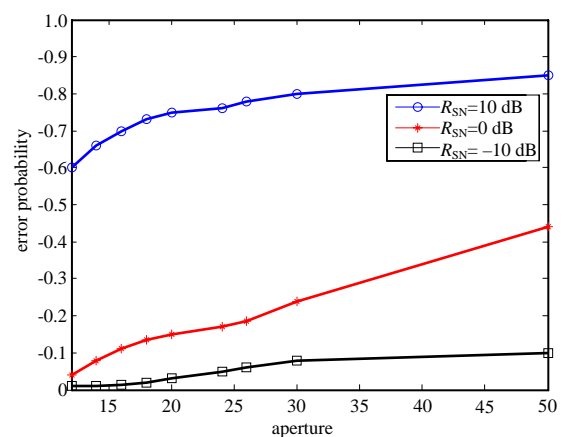


Fig.5 Probability of error estimation versus the array aperture  
图5 错误估计概率随孔径变化图

- [4] 陆珉,许红波,朱宇涛,等. MIMO 雷达 DOA 估计阵列设计[J]. 航空学报, 2010,31(7):1410–1416. (LU Min,XU Hongbo,ZHU Yutao,et al. Array design of MIMO radar estimation of DOA[J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2010,31(7):1410–1416.)
- [5] GORJI A A,THARMARASA R,KIRUBARAJAN T. Tracking multiple unresolved targets using MIMO radars[C]// IEEE Aerospace Conference. Big Sky,MT,USA:IEEE, 2010:1–14.
- [6] GORJI A A,THARMARASA R,BLAIR W D,et al. Multiple unresolved target localization and tracking using collocated MIMO radars[J]. IEEE Transactions on Aerospace & Electronic Systems, 2012,48(3):2498–2517.
- [7] GORJI A A,THARMARASA R,KIRUBARAJAN T. Optimal antenna allocation in MIMO radars with collocated antennas[J]. IEEE Transactions on Aerospace & Electronic Systems, 2012,50(1):542–558.
- [8] CHEN H,LI X,ZHUANG Z. Antenna geometry conditions for MIMO radar with uncoupled direction estimation[J]. IEEE Transactions on Antennas & Propagation, 2012,60(7):3455–3465.
- [9] JIANG W,CHEN H,LI X. Antenna geometry strategy with prior information for direction-finding MIMO radars[J]. Journal of Systems Engineering and Electronics, 2015,26(3):468–475.
- [10] CHEN H,Ding J,LI X. MIMO radar systems design based on maximum channel capacity[J]. Progress in Electromagnetics Research B, 2011(34):313–326.
- [11] 刘声,杨力生,殷艳红,等. 双基地 MIMO 雷达的快速测向算法[J]. 吉林大学学报(工学版), 2016,46(5):1675–1680. (LIU Sheng,YANG Lisheng,YIN Yanhong,et al. Fast direction finding algorithm in bistatic MIMO radar[J]. Journal of Jilin University(Engineering and Technology Edition), 2016,46(5):1675–1680.)
- [12] PÁZMAN A. Foundations of optimum experimental design[M]. Holland:D. Reidel Publishing Company, 1986.
- [13] WONG K M,WALKER R S,NIEZGODA G. Effects of random sensor motion on bearing estimation by the MUSIC algorithm[J]. Radar & Signal Processing IEEE Proceedings F, 1988,135(3):233–250.
- [14] HUANG X. Design of linear array geometry for high resolution array processing[D]. Hamilton,Ontario,Canada:McMaster University, 1993.

#### 作者简介:



顾帅楠(1992–), 女, 江苏省南通市人, 在读硕士研究生, 主要研究方向为 MIMO 雷达阵列设计. email:m15690887855@163.com.

郑娜娥(1984–), 女, 福建省漳州市人, 博士, 讲师, 主要研究方向为空间目标信息获取与处理、雷达资源分配.

秦文利(1991–), 男, 山东省潍坊市人, 在读硕士研究生, 主要研究方向为 MIMO 雷达目标检测与跟踪.