

文章编号: 2095-4980(2020)06-1010-06

相干态相位的最优估计与跟踪方法

徐 涵^{1a}, 陈树新^{1a}, 吴 昊^{*1a}, 洪 磊^{1a}, 崔军辉^{1b,2}

(1.空军工程大学 a.信息与导航学院通信系统教研室; b.研究生院, 陕西 西安 710077;
2.解放军 69220 部队, 新疆 阿克苏 842000)

摘 要: 在传统量子相位跟踪方法中, 通常对输出结果进行线性化处理, 这对本振相位和信号相位有严格的限制要求, 且并不适用于如干涉法测角等导航系统。为此, 本文将零拍输出形式进行等价变换, 设计了一种最大似然估计迭代算法, 实现了相干态相位跟踪。与传统线性化的量子相位跟踪方法相比, 避免引入线性化误差, 更加适用于导航系统中信号相位跟踪; 通过计算 Fisher 信息矩阵, 证明此方法在理论上能够达到量子克拉美—罗下界, 具有最优估计性能。

关键词: 量子相位跟踪; 干涉法测角; 最大似然估计迭代算法; 克拉美—罗下界

中图分类号: TN964

文献标志码: A

doi: 10.11805/TKYDA2019166

Optimal estimation and tracking of coherent state phase

XU Han^{1a}, CHEN Shuxin^{1a}, WU Hao^{*1a}, HONG Lei^{1a}, CUI Junhui^{1b,2}

(1a. Information and Navigation College; 1b. Graduate School, Air Force Engineering University,
Xi'an Shaanxi 710077, China; 2. 69220 Army, Akesu Xinjiang 842000, China)

Abstract: In the traditional quantum phase tracking method, the output results are usually linearized, which has a strict limit on the local oscillator phase and signal phase, therefore, it is not applicable to the angle measurement by interferometry. In this paper, the quantum homodyne output is transformed and an iterative algorithm for maximum likelihood estimation is designed to realize the coherent state phase tracking. The Fisher information matrix is calculated to show that the proposed method can reach the quantum Cramer–Rao bound theoretically and has the best estimation.

Keywords: quantum phase tracking; interferometry; iterative algorithm for maximum likelihood estimation; Cramer–Rao bound

无线电导航由于其工作时间长、范围广、定位时间短等优点, 已在飞行器引导、无人机作战、武器精确制导等方面发挥了极大的作用^[1-3]。导航参数的测量是无线电导航系统的关键问题之一, 其中, 波达角可利用干涉法相位式测角获取, 即利用 2 个分置天线接收到的信号进行干涉, 再根据实时相位差与目标方位角的对应关系, 得到目标的角度信息。获取波达角的核心是实时跟踪干涉场信号的相位信息。

经典理论下的相位测量精确度有不可逾越的界限, 这成为制约波达角精确度获取的瓶颈。基于量子理论的相位估计目前在许多领域至关重要, 包括量子通信^[4-5]、量子度量^[6]等。由于受电磁场真空涨落的影响, 量子力学在精确度上规定了标准极限, 限制了引力波探测等技术的进一步发展^[7]。量子极限由最优输入量子态、量子测量和数据处理所决定, 目前已有大量的研究方法使相位估计精确度达到或突破量子标准极限。其中 PEZZE L 等已证明平衡零拍探测在理想条件下可以突破量子标准极限, 达到海森堡极限^[8]; 日本 YONEZAWA 等通过对光学参量振荡产生的相位压缩光进行相位跟踪, 测量精确度比标准量子极限提升了 15%^[9]; WISEMAN 小组在之前量子相位自适应测量模型的基础上, 对连续变化的相干态相位进行跟踪, 并证明利用平滑进行数据处理比滤波精确度更高^[10]。在目前的相位跟踪技术中, 文献[9-11]均采用将测量模型线性化的方法, 然后进行数据处理, 此方法需要本振相位估计值任意时刻接近信号相位, 才不会引入较大的线性化误差, 对于非线性程度高、信号相位变化明显的无线电导航系统有极大的局限。

收稿日期: 2019-05-22; 修回日期: 2019-07-25

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61703420; 61673392)

作者简介: 徐 涵(1994-), 男, 硕士, 主要研究方向为量子信息、导航控制。email:xuhanstudy@163.com

*通信作者: 吴 昊 email:wuhaostudy@163.com

针对非线性模型，除了线性化方法外，还可以采用非线性估计算法，如无迹卡尔曼滤波(Unscented Kalman Filter, UKF)^[12]，也可以调整模型结构，使用基于概率的估计算法。本文主要以自适应零拍探测模型为基础，对相干态相位进行实时跟踪，为避免引入线性化误差和实现相干态相位的实时更新，将零拍探测的输出进行等价变换，设计了最大似然估计迭代算法对数据进行处理。实验结果表明，所提方法能够实现相干态相位跟踪，并且通过计算量子 Fisher 信息矩阵，证明此算法在理论上能够达到量子克拉美—罗下界。

1 干涉法相位式测角

在无线电导航测角系统中，通常采取相位式测角方式。其原理是基于导航信号的周期性，将导航信号的相位与角度参量建立对应关系，从而通过测试信号相位获得角度信息。干涉法相位式测角已广泛用于目标定位与跟踪、飞行器姿态测量等领域。此方法并非直接测量信号相位获取角度信息，而是通过 2 个分置天线接收同一目标传来的信号，将接收到的信号进行干涉，得到 2 个接收信号的相位差 $\Delta\phi$ ，再通过相位差 $\Delta\phi$ 与目标方位角 β 的对应关系实现角度参数的测量。

如图 1 所示，天线 A、B 之间的距离为 d ，与信号辐射源 P 相距 r ，当 $r \gg d$ 时，可以视信号是平行入射到 A、B，且与基线 AB 的夹角为 β ，这时可以建立两天线接收信号的相位差 $\Delta\phi$ 与角 β 的关系为：

$$\beta = \arccos \frac{\lambda \Delta\phi}{2\pi d} \tag{1}$$

式中 λ 为信号的波长，由式(1)可得，只需测得相位差 $\Delta\phi$ ，即求得方向角 β 。

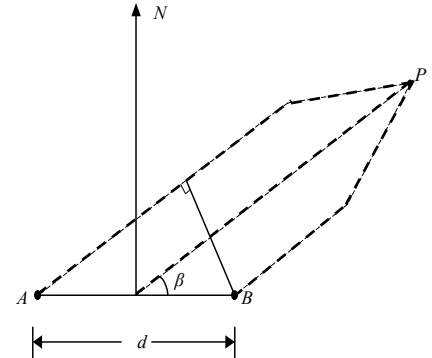


Fig.1 Phase angle measurement by interferometry
图 1 干涉法相位式测角

2 量子相位自适应测量

由干涉法相位式测角原理可知，获得更高精确度波达角的关键是实现量子相位的跟踪。本文主要针对相干态光场相位进行研究，相干态通过量子零拍探测后^[13]，可得：

$$\eta = 2\text{Re}(\alpha e^{-i\Phi}) + z \tag{2}$$

式中： Φ 为本振相位； z 为量子噪声； α 为相干态 $|\alpha\rangle$ 的本征值。

相干态 $|\alpha\rangle$ 可通过平移真空态 $|0\rangle$ 得到，即：

$$|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle \tag{3}$$

式中平移算符 $D(\alpha) = \exp(\alpha a^\dagger - \alpha a)$ ， a^\dagger 和 a 分别为光子产生算符和光子湮灭算符。

假设相干态相位为 ϕ ，即 $\alpha = |\alpha|e^{i\phi}$ ，将式(2)展开可得：

$$\eta = 2|\alpha| \cos(\phi - \Phi) + z \tag{4}$$

令 $\Phi = \phi + \frac{\pi}{2}$ ， ϕ 为相干态相位 ϕ 的估计值，定义其为新的本振相位，则式(4)可改写为：

$$\eta = 2|\alpha| \sin(\phi - \phi) + z \tag{5}$$

式中 $z = x_0 \cos(\phi - \phi) - y_0 \sin(\phi - \phi)$ 。 x_0 和 y_0 是真空态的 2 个正交分量，通过计算真空态的 Wigner 函数 $W(x_0, y_0) = \frac{2}{\pi} \exp(-2x_0^2 - 2y_0^2)$ ，可知真空态的正交场分量服从零均值的高斯分布，其统计分布与相位 $\phi - \phi$ 不相关，则 z 的统计特性是高斯分布。正是 z 引起了量测的不确定性，这里假定其为高斯噪声。量子零拍探测技术在本振相位 Φ 与待测相位正交时，即 $\phi = \phi$ 时，可得到最精确的值^[13]，因此需要对本振相位进行锁相处理。锁相过程如图 2 所示，首先输入信号与本振信号通过分束器 BS，其次由光电探测器分别得到两路信号的电流强度并相减得到输出电流强度，

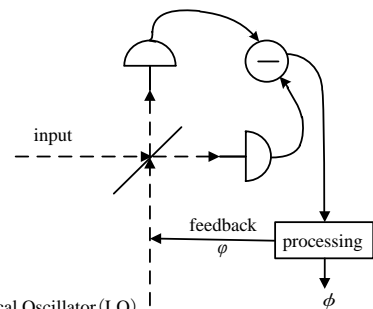


Fig.2 Quantum adaptive phase measurement model
图 2 量子自适应相位测量模型

最后对输出结果进行数据处理，并将处理得到的相位结果对本振相位进行调整，依此循环进行，使本振相位 ϕ 满足与待测相位正交的条件，从而得到精确度最高的相位。

在文献[14–15]中，假设估计本振相位在任何时刻都是接近相干态平均相位，即：

$$\langle (\phi - \hat{\phi})^2 \rangle \ll 1 \tag{6}$$

则式(5)可线性化为：

$$\eta = 2|\alpha|(\phi - \hat{\phi}) + z \tag{7}$$

将零拍输出结果线性化后，利用卡尔曼滤波算法对相位进行估计。为了提高估计精确度，文献[11]利用数据平滑技术。

3 最大似然估计迭代算法

线性化虽然可以简化参数估计过程，但在没有式(6)的前提下会引入较大的线性化误差，且数据平滑会给系统的实时性造成影响，并不适用于导航系统中的相位跟踪。为解决上述问题，本文将式(5)等价变换后，设计了一种最大似然估计迭代算法进行相干态相位跟踪。

首先对式(5)进行等价变换得到：

$$\eta = 2|\alpha|(\sin \phi \cos \hat{\phi} - \cos \phi \sin \hat{\phi}) + z \tag{8}$$

对任一本振相位 ϕ ，假设连续观察的 N 个采样数据对应的相位保持不变(高速采样下所需时间极短)，记 N 个采样数据为 $\boldsymbol{\eta}$ ，则 $\boldsymbol{\eta}$ 服从以二维被估计矢量 $\boldsymbol{\theta} = [|\alpha| \sin \phi \quad |\alpha| \cos \phi]^T$ 为条件的联合概率密度函数：

$$p(\boldsymbol{\eta}|\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} |\mathbf{C}_n|^{1/2}} \exp \left[-\frac{1}{2} (\boldsymbol{\eta} - \mathbf{H}\boldsymbol{\theta})^T \mathbf{C}_n^{-1} (\boldsymbol{\eta} - \mathbf{H}\boldsymbol{\theta}) \right] \tag{9}$$

式中： \mathbf{C}_n 为协方差矩阵，为 N 维对角阵；系数矩阵 $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \cos \phi_1 & -\sin \phi_1 \\ \cos \phi_2 & -\sin \phi_2 \\ \vdots & \vdots \\ \cos \phi_N & -\sin \phi_N \end{bmatrix}$ 。

对式(9)求最大似然得：

$$\left. \frac{\partial \ln p(\boldsymbol{\eta}|\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}_{ml}} = \mathbf{0} \tag{10}$$

利用高斯牛顿法可解得其最大似然估计：

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{ml} = (\mathbf{H}^T \mathbf{C}_n^{-1} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{C}_n^{-1} \boldsymbol{\eta} \tag{11}$$

由此可得相干态相位 $\hat{\phi} = \arg [\hat{\boldsymbol{\theta}}_{ml}(1)/\hat{\boldsymbol{\theta}}_{ml}(2)]$ ，通过其估计值赋予本振相位，再作相位估计，如此循环，即可实现自适应相位估计功能。

由于最大似然估计能够达到克拉美—罗下界，计算 Fisher 信息矩阵：

$$\mathbf{J} = E \left[\frac{\partial \ln p(\boldsymbol{\eta}|\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \left(\frac{\partial \ln p(\boldsymbol{\eta}|\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right)^T \right] = E \left[\mathbf{H}^T \mathbf{C}_n^{-1} \mathbf{z}_n \mathbf{z}_n^T \mathbf{C}_n^{-1} \mathbf{H} \right] = \mathbf{H}^T \mathbf{C}_n^{-1} \mathbf{H} \tag{12}$$

式中 \mathbf{z}_n 是 N 个采样数据的噪声。则估计矢量的均方误差阵 $\mathbf{M}_{\hat{\boldsymbol{\theta}}_{ml}} = \mathbf{J}^{-1} = \mathbf{C}_n$ ，即估计值精确度能达到量子真空涨落，具有最小不确定度。

下面推导一种最大似然估计的迭代算法：

如式(11)，若是对零拍数据进行了 $N+1$ 次观测，可得到估计矢量：

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N+1} = [\mathbf{H}^T(N+1) \mathbf{C}^{-1}(N+1) \mathbf{H}(N+1)]^{-1} \times \mathbf{H}^T(N+1) \mathbf{C}^{-1}(N+1) \boldsymbol{\eta}(N+1) \tag{13}$$

式中： $\mathbf{H}(N+1) = \begin{bmatrix} \mathbf{H}(N) \\ \mathbf{H}_{N+1} \end{bmatrix}$ ； $\mathbf{C}(N+1) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}(N) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{N+1} \end{bmatrix}$ 。

设 $\mathbf{F}_{N+1} = [\mathbf{H}^T(N+1) \mathbf{C}^{-1}(N+1) \mathbf{H}(N+1)]^{-1}$ ，则：

$$\Gamma_{N+1} = [\mathbf{H}^T(N+1)\mathbf{C}^{-1}(N+1)\mathbf{H}(N+1)]^{-1} = \left([\mathbf{H}^T(N) \quad \mathbf{H}_{N+1}^T] \begin{bmatrix} \mathbf{C}^{-1}(N) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{N+1}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{H}(N) \\ \mathbf{H}_{N+1} \end{bmatrix} \right)^{-1} =$$

$$[\Gamma_{N+1}^{-1} + \mathbf{H}_{N+1}^T \mathbf{C}_{N+1}^{-1} \mathbf{H}_{N+1}]^{-1}$$

利用矩阵求逆引理： $(\mathbf{B} + \mathbf{D}^H \mathbf{C} \mathbf{D})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} - \mathbf{B}^{-1} \mathbf{D}^H (\mathbf{C}^{-1} + \mathbf{D} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{D}^H)^{-1} \mathbf{D} \mathbf{B}^{-1}$ ，可得

$$\Gamma_{N+1} = \Gamma_N - \Gamma_N \mathbf{H}_{N+1}^T [\mathbf{C}(N) + \mathbf{H}_{N+1} \Gamma_N \mathbf{H}_{N+1}^T]^{-1} \mathbf{H}_{N+1} \Gamma_N \quad (15)$$

重写式(13)：

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N+1} = \Gamma_{N+1} \mathbf{H}^T(N+1) \mathbf{C}^{-1}(N+1) \boldsymbol{\eta}(N+1) = \Gamma_{N+1} [\mathbf{H}^T(N) \quad \mathbf{H}_{N+1}^T] \begin{bmatrix} \mathbf{C}^{-1}(N) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{N+1}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}(N) \\ \boldsymbol{\eta}_{N+1} \end{bmatrix} =$$

$$\Gamma_{N+1} [\mathbf{H}^T(N) \mathbf{C}^{-1}(N) \boldsymbol{\eta}(N) + \mathbf{H}_{N+1}^T \mathbf{C}_{N+1}^{-1} \boldsymbol{\eta}_{N+1}]$$

为方便区分，将 N 次观测的解析式(11)写为：

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_N = \Gamma_N \mathbf{H}^T(N) \mathbf{C}^{-1}(N) \boldsymbol{\eta}(N) \quad (17)$$

将式(17)两端同乘 $\Gamma_{N+1} \Gamma_N^{-1}$ ，得：

$$\Gamma_{N+1} \Gamma_N^{-1} \hat{\boldsymbol{\theta}}_N = \Gamma_{N+1} \mathbf{H}^T(N) \mathbf{C}^{-1}(N) \boldsymbol{\eta}(N) \quad (18)$$

由式(14)可知：

$$\Gamma_N^{-1} = \Gamma_{N+1}^{-1} - \mathbf{H}_{N+1}^T \mathbf{C}_{N+1}^{-1} \mathbf{H}_{N+1} \quad (19)$$

将其代入式(18)，得：

$$\Gamma_{N+1} \mathbf{H}^T(N) \mathbf{C}^{-1}(N) \boldsymbol{\eta}(N) = \hat{\boldsymbol{\theta}}_N - \Gamma_{N+1} \mathbf{H}_{N+1}^T \mathbf{C}_{N+1}^{-1} \mathbf{H}_{N+1} \hat{\boldsymbol{\theta}}_N \quad (20)$$

代入式(16)，得：

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N+1} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_N + \Gamma_{N+1} \mathbf{H}_{N+1}^T \mathbf{C}_{N+1}^{-1} (\boldsymbol{\eta}_{N+1} - \mathbf{H}_{N+1} \hat{\boldsymbol{\theta}}_N) \quad (21)$$

由式(13)和式(21)得到了迭代算法。可以看出，第 $N+1$ 观测数据的估计值 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N+1}$ 由前一时间刻估计值 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_N$ 加上“修正量”，该修正量是第 $N+1$ 观测数据 $\boldsymbol{\eta}_{N+1}$ 和 $\mathbf{H}_{N+1} \hat{\boldsymbol{\theta}}_N$ 之差形成的新息，并被 $\Gamma_{N+1} \mathbf{H}_{N+1}^T \mathbf{C}_{N+1}^{-1}$ 修正，同时 Γ_{N+1} 也可递推得到。该算法在理论上能确切达到克拉美—罗下界，具有最优的性能，且并不需要知道相干态的幅度信息 $|\alpha|$ ，因为在求解相位时，幅度信息会被抵消掉。

4 实验与分析

该算法需要先观察一段数据，估计出最后时刻的状态值，然后实时更新相干态。实验分为 2 部分：a) 对某一时刻的相位状态估计；b) 对相干态相位跟踪。相干态相位的状态模型为 $\dot{\phi} = \sqrt{\kappa} w$ ， w 为均值为 0 的高斯白噪声， κ 为决定噪声大小的参数，其离散形式为 $\phi(t_{k+1}) = \phi(t_k) + w(t_k)$ 。假设相干态平均相位为 $\pi/3$ ，初始本振相位为 $\varphi = 2\pi/3$ 。

由式(8)得到 N 个观测数据，记为 $\boldsymbol{\eta} = [\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n]^T$ ，对 t_N 时刻的相位值进行估计。定义相位均方根误差：

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{L} \sum_{j=1}^L (\hat{\phi}_{i,j} - \phi_{N,j})^2} \quad (22)$$

式中 $\hat{\phi}_{N+1,j}$ 为 j 次仿真第 i 次迭代后的估计值，Monte-Carlo 次数为 $L=100$ 。初始相位估计值为 $\hat{\phi}_{0,j}$ ，过程噪声 $w \sim (0, \sigma_w^2)$ ，量测噪声 $z \sim (0, \sigma_z^2)$ 。参数设置如表 1 所示。

表 1 相关参数设置
Table 1 Parameters setting

parameter	$\hat{\phi}_{0,j}$	σ_w	σ_z
value	0	0.001	0.001

1) 对某一时刻的状态估计，分别用 10 个数据，20 个数据，30 个数据对 t_{10}, t_{20}, t_{30} 时刻的相位进行估计，如图 3 所示。结果表明：当利用高斯牛顿法求解最大似然估计方程时，3 个时刻的相位均需要迭代 60 次以上实现跟踪，且观测值个数越多，通过最大似然估计得到的相位精确度越高。这是因为在最大似然估计方法中，样本值数目越多，对应似然函数越准确，求解似然函数得到的参数估计精确度也会越高。

2) 对相干态相位跟踪结果如图 4 所示，首先用 20 个观测数据对 t_{20} 时刻的相位进行估计，图中没有 t_{20} 之前

的相位跟踪轨迹。在高速采样下,可以忽略 t_{20} 时刻前的相位信息。得到 t_{20} 时刻的相位后,利用本文所提方法实时更新 t_{20} 时刻之后的相干态相位值,仿真结果表明:本文所提方法能够实现相干态相位的跟踪,且均方根误差在算法收敛后能稳定在 0~0.000 5 之间。

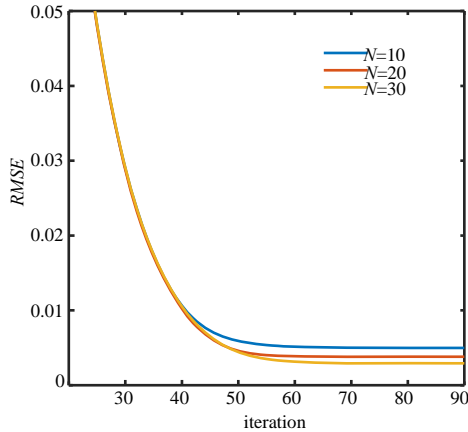


Fig.3 Comparison of state estimation error
图 3 状态估计误差对比

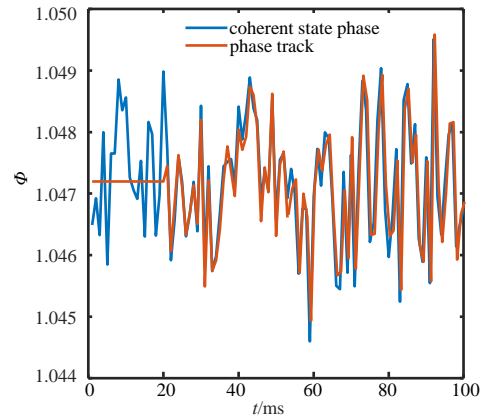


Fig.4 Coherent state tracking trajectory
图 4 相干态相位跟踪轨迹

5 结论

无线电导航中波达角等参数获取与信号相位相关,利用量子信号获取导航参数关键在于如何对量子场相位进行跟踪。在传统量子相位估计中,通常采用线性化方法处理数据,这对本振相位和信号相位有严格的限制条件。由于导航系统的信号非线性程度一般较大,很难满足本振相位在任意时刻均接近量子信号平均相位,如果继续采用线性化方法对相干态相位进行估计,会带来巨大的线性化误差。针对所提问题,本文在自适应量子相位跟踪模型的基础上,对相干态通过零拍探测后的输出模型进行等价代换,设计了一种最大似然估计迭代算法,实现相干态相位跟踪。从实验结果看出该方法能够实现相位跟踪,且观测样本越多,估计精确度越高;通过计算 Fisher 信息矩阵证明该方法在理论上能够达到量子克拉美-罗下界,具有最佳参数估计性能。但是这种方法需要先对零拍数据观察一段再进行处理,假设这期间相干态相位不变,对于系统的实时性有一定的影响,但是避免了线性化误差,使得量子自适应相位跟踪模型更适用于导航系统的参数获取。且量子不可克隆性能够避免导航信息被截获,从而保证了导航的安全性。下一步,将对非经典特性的量子场信号相位进行实时跟踪,有望突破散粒噪声的限制,进一步提高导航参数的估计精确度。

参考文献:

- [1] 杜政东,魏平. 基线引导式快速相关干涉仪测向性能分析及提升方法[J]. 信号处理, 2016,32(3):327-334. (DU Zhengdong,WEI Ping. Performance analysis and improved method of the fast correlative interferometer direction finder using guide baselines[J]. Signal Processing, 2016,32(3):327-334.)
- [2] 李海涛,周欢,郝万宏,等. 深空导航无线电干涉测量技术的发展历程和展望[J]. 飞行器测控学报, 2013,32(6):470-478. (LI Haitao,ZHOU Huan,HAO Wanhong,et al. Development of radio interferometry and its prospect in deep space navigation[J]. Journal of Spacecraft TT&C Technology, 2013,32(6):470-478.)
- [3] 朱庄生,郭韬. 分布式 pos 传递对准对 insar 干涉测量影响的分析[J]. 中国惯性技术学报, 2014(22):432-438. (ZHU Zhuangsheng,GUO Tao. Effect of distributed POS transfer alignment on InSAR interferometric measurement[J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2014,22(4):432-438.)
- [4] CZAJKOWSKI J,JARZYNA M,DEMKOWICZ-DOBZANSKI R. Super-additivity in communication of classical information through quantum channels from a quantum parameter estimation perspective[J]. New Journal of Physics, 2017,19(7):073034.

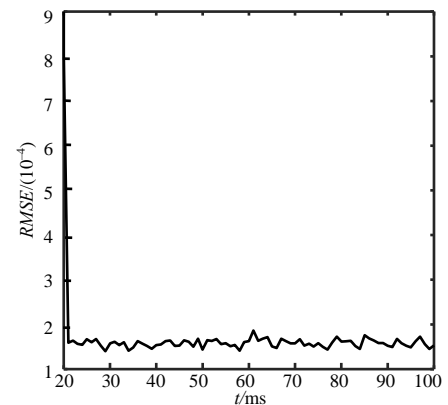


Fig.5 Coherent state tracking error
图 5 相干态相位跟踪误差