第 22 卷 第 10 期 太赫兹科学与电子信息学报 Vol.22，No.10
2024 年 10 月 Journal of Terahertz Science and Electronic Information Technology Oct.，2024

文章编号：2095-4980(2024)10-1133-09

基于共形极化敏感阵列的MUSIC算法角度分辨力研究

皮 楚，吴 迪，何昉明

(中航无锡雷达技术有限公司 北京分公司，北京 100086)

摘 要：针对具有超分辨能力的多重信号分类(MUSIC)算法在基于共形极化敏感阵列的被动雷达导引头测向应用中的角分辨力问题，提出了谱函数角分辨力的定义与分辨角门限。利用MUSIC算法零谱的定义近似推导了在渐进有偏条件下的期望值，并针对矢量阵列与标量阵列模型分别得出了相应的角分辨力表达式。以均匀圆形阵列为例，根据计算机仿真模型定量分析了各参量对角分辨力的影响，对比了标量阵列与矢量阵列的分辨角门限统计值。仿真结果表明，在同样的阵列及信号源参数设定条件下，标量均匀圆阵的分辨角值普遍高于矢量均匀圆阵。

关键词：被动测向；极化敏感阵列；角分辨力；多重信号分类算法

中图分类号：TN914.42 **文献标志码**：A **doi**：10.11805/TKYDA2023019

Study on angular resolution performance of MUSIC algorithm based on a conformal diversely polarized array

PI Chu，WU Di，HE Fangming

(Beijing Branch，AVIC Wuxi Radar Technology Co. LTD.，Beijing 100086，China)

Abstract：For the application of the Multiple Signal Classification (MUSIC) algorithm with super-resolution capabilities in the direction finding of passive radar seeker heads based on conformal polarization-sensitive arrays, the definition of spectral function angular resolution and the discrimination angle threshold are proposed. By approximating the expected value under the asymptotically biased condition using the definition of the MUSIC algorithm's zero spectrum, the corresponding angular resolution expressions for vector array and scalar array models are derived respectively. Taking the uniform circular array as an example, the influence of various parameters on angular resolution is quantitatively analyzed based on the computer simulation model, and the statistical values of the discrimination angle threshold for scalar and vector arrays are compared. Simulation results show that under the same array and signal source parameter settings, the discrimination angle value of the scalar uniform circular array is generally higher than that of the vector uniform circular array.

Keywords：passive direction finding；polarization sensitive array；angular resolution；Multiple Signal Classification algorithm

精确制导武器是电子攻击的主要形式之一，随着现代战场电磁环境日益复杂，为使反辐射导弹能够精确攻击各种威胁雷达，提升其抗干扰和抗关机能力，通常采用双模或多模复合制导方式。复合制导的工作模式将带来多个导引头争夺弹载平台孔径资源的问题。被动雷达导引头通过采用与弹头形状契合的共形天线阵列将有限的弹头空间让给主动雷达导引头，可有效解决该类问题[1]。

由于弹径的限制，基于共形天线阵列的被动测向角度分辨力通常也有限。即当多个同时到达的辐射信号在空间来波方向上相近时，普遍存在角度难以区分的问题。传统的测向方法，如比幅法、干涉仪比相法在理论上均无法解决同时到达的辐射源角分辨力问题[2]。近年来，随着阵列信号处理算法的飞速发展，以多重信号分类(MUSIC)[3]算法为代表的空间谱估计类算法因其超分辨能力受到了研究人员的广泛关注。

本文重点研究阵列被动测向中MUSIC算法对同时到达的2个空间毗邻信号源的角度分辨力问题。首先，概述了参数估计的分辨力问题，给出测向角分辨力的定义及分辨角门限；重点研究空间谱算法超分辨的原理，并

收稿日期：2023-01-19；修回日期：2023-05-16

分别针对标量均匀圆阵与矢量均匀圆阵的模型推导MUSIC算法谱函数的角度分辨力；然后，通过计算机仿真定量分析影响分辨力的参量，并对比了标量均匀圆阵与矢量均匀圆阵的角分辨力。仿真结果表明，在同样的阵列及信号源参数设定条件下，标量均匀圆阵的分辨角值普遍高于矢量均匀圆阵。

1 分辨角的定义

对于电子侦查设备，当接收机采集到的时域信号中包含多个同时到达的信号源时，普遍存在角度分辨的问题。在假设信源数估计正确的前提条件下，本文针对MUSIC算法重点研究其谱函数的角分辨力问题。通过广泛调研，谱函数分辨角主要存在以下几种定义方式。

1) 文献[3]中定义的谱函数分辨力$Q(\Delta)$表达式为：

$$Q(\Delta)=P_{\mathrm{peak}}-P\left(\theta_{\mathrm{m}}\right) \tag{1}$$

式中：$P(\theta)$为参数估计算法的谱函数表达式；$\theta_{\mathrm{m}}=\left(\theta_1+\theta_2\right)/2$，为2个信号源真实角度中心；$P_{\mathrm{peak}}=\left[P\left(\theta_1\right)+P\left(\theta_2\right)\right]/2$，为2个信号源谱函数的均值；$\Delta=\left|\theta_1-\theta_2\right|$为信号角度差值，规定当$Q(\Delta)>0$时，2个信号源是可分辨的，且分辨角为$\Delta$。

2) 文献[4]中，当谱函数在2个信号中点位置处的一阶导数$\partial Q/\partial\theta|_{\theta=\theta_{\mathrm{m}}}=0$，且二阶导数$\partial Q^2/\partial\theta^2|_{\theta=\theta_{\mathrm{m}}}>0$，即空间谱在2个信号之间呈上凹形状，此时2个信号源可分辨。因此，当$\partial Q^2/\partial\theta^2|_{\theta=\theta_m}=0$，即二阶导数等于零时，2个信号源的角度差$\Delta$即为分辨角。

3) 文献[5]将谱函数分辨问题转化为干扰环境中的信号检测问题，若信号能被检测出来，则可以分辨；否则，不能分辨。因此衡量系统分辨力的指标为检测概率，当检测概率等于某一指定门限时，2个信号源的角度差Δ为分辨角。

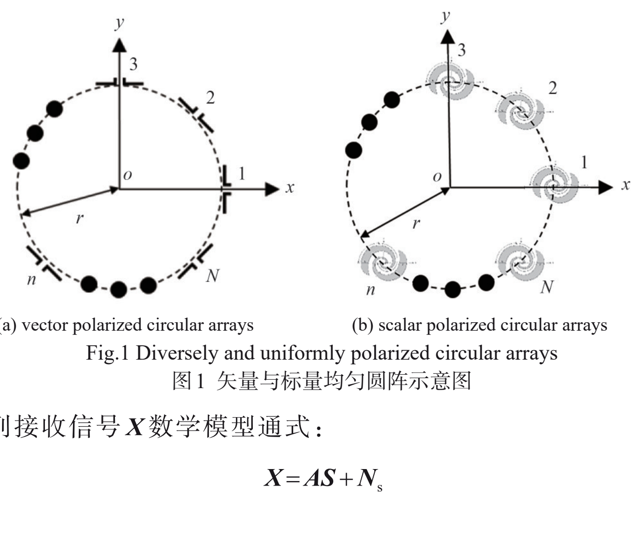
4) 文献[6]采用分辨概率描述谱函数的分辨性能，通过Monte-Carlo仿真试验办法统计在一定区域内出现2个谱峰的频度。在仿真次数较大时将频度直接作为分辨概率的估计，当分辨概率大于某一指定门限时，即认为可以分辨。因此，当分辨概率等于指定门限时，2个信号源的角度差Δ为分辨角。

虽然存在多种不同的角分辨力的评判标准，但在相同的参数设定条件下，利用上述标准计算所得到的角度分辨值相差不大[7]。本文根据文献[3]中的定义推导MUSIC谱函数分辨角门限。

2 理论推导

2.1 阵列模型

分辨力是衡量空间谱函数角度估计性能的重要指标之一，反映了估计器表现谱微小细节的能力。本文基于角分辨力的定义，针对标量与矢量均匀圆阵模型，分别推导MUSIC谱函数分辨角。如图1所示，矢量阵列模型为由多个理想短偶极子天线组成的均匀圆阵，标量阵列模型为由多个圆极化平面螺旋天线组成的均匀圆阵。所有阵元均位于xoy平面内，且无z轴分量，假设N个阵元均各向同性无互耦，x_n、y_n分别表示第n个阵元相对坐标原点的x、y坐标值，并假设远场中存在多个毗邻同频非相干的窄带信号源同时入射到阵列。



(a) vector polarized circular arrays (b) scalar polarized circular arrays

Fig.1 Diversely and uniformly polarized circular arrays

图1 矢量与标量均匀圆阵示意图

根据文献[3]中提出的阵列接收信号$\boldsymbol{X}$数学模型通式：

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{AS}+\boldsymbol{N}_{\mathrm{s}} \tag{2}$$

式中：$\boldsymbol{A}$为阵列流型；$\boldsymbol{S}$为空间信号矢量；$\boldsymbol{N}_{\mathrm{s}}$为噪声矩阵。$\boldsymbol{A}$的通式为：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NM} \end{bmatrix}_{N\times M}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_M \end{bmatrix}_{N\times M} \tag{3}$$

式中：N为天线阵元数；M为信号源数；$\boldsymbol{a}_m$为第m个信号源的导向矢量。在角分辨力问题中默认$M=2$，本文后续研究不涉及同时到达阵列的信号源数$M>2$的情况。除去阵列本身的参数设定，对于不同类型的阵列，导向矢量的表达式将由不同的特征参量描述。对于标量阵列(Uniformly Polarized Array，UPA)，导向矢量将完全由信号源的来波方向(Direction of Arrival，DOA)和中心频率参量决定，其表达式$\boldsymbol{a}_m^{\mathrm{UPA}}$为：

$$\boldsymbol{a}_m^{\mathrm{UPA}}=\begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau_{1m}} \\ \vdots \\ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau_{Nm}} \end{bmatrix}_{N\times 1} \tag{4}$$

式中：$m=1,2$；$\omega=2\pi f$，f为信号源载频。对于均匀圆阵，时延τ_{nm}的表达式为：

$$\tau_{nm}=\frac{r\left[\cos\left(\dfrac{2\pi(n-1)}{N}-\alpha_m\right)\cos(\beta_m)\right]}{c} \tag{5}$$

式中：r为圆阵半径；c为光速；$n=1,2,\cdots,N$；$\alpha_m\in[0,2\pi]$为第m个辐射源的方位角；$\beta_m\in[0,\pi/2]$为第m个辐射源的仰角。

对于极化敏感阵列(Diversely Polarized Array，DPA)，导向矢量不仅由信号源的来波方向和中心频率参量决定，同时还与其极化特征参量相关，因此其表达式相对标量阵列更为复杂。

根据电磁波极化定义，虽然极化特性是与DOA相关的，但参数估计算法可实现DOA和极化参数估计的分离。因此，研究基于极化敏感阵列的MUSIC算法分辨力问题与标量阵列一样，即探讨谱函数的角分辨能力。

本文采用Jones矢量表示法即幅相电描述法(极化辅助角：$\gamma\in[0,\pi/2]$；极化相位差角：$\eta\in[-\pi,\pi]$)对电磁波的极化特性进行表述。

根据文献[8]，第m个辐射源的导向矢量表达式为：

$$\boldsymbol{a}_m^{\mathrm{DPA}}=\left[\boldsymbol{a}_m^{\mathrm{UPA}}\odot\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{r}_{p1} \\ \boldsymbol{r}_{p2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{r}_{pn} \\ \vdots \\ \boldsymbol{r}_{pN} \end{bmatrix}\boldsymbol{w}_m(\alpha_m,\beta_m)\,\boldsymbol{p}_m(\gamma_m,\eta_m)\right)\right]_{N\times 1} \tag{6}$$

式中：$\boldsymbol{w}_m(\alpha_m,\beta_m)$为第$m$个信号的极化—角度域相干导向矩阵；$\boldsymbol{p}_m(\gamma_m,\eta_m)$为第$m$个接收信号的极化矢量；符号$\odot$表示向量点乘；矢量$\boldsymbol{r}_{pn}$为第$n$个阵元的极化匹配矩阵，对于均匀圆阵，有：

$$\boldsymbol{r}_{pn}=\begin{bmatrix} \cos\left(\dfrac{2\pi(n-1)}{N}-\alpha_m\right) & \sin\left(\dfrac{2\pi(n-1)}{N}-\alpha_m\right) \end{bmatrix} \tag{7}$$

$\boldsymbol{w}_m(\alpha_m,\beta_m)$仅与信号DOA有关，其第1列与电磁场的水平方向矢量相关，第2列与电磁场的垂直方向矢量相关。

$$\boldsymbol{w}_m(\alpha_m,\beta_m)=\begin{bmatrix} -\sin\alpha_m & \cos\alpha_m\sin\beta_m \\ \cos\alpha_m & \sin\alpha_m\sin\beta_m \end{bmatrix} \tag{8}$$

$\boldsymbol{p}_m(\gamma_m,\eta_m)$仅与信号极化参量有关：

$$\boldsymbol{p}_m(\gamma_m,\eta_m)=\begin{bmatrix} \cos\gamma_m \\ \sin\gamma_m\mathrm{e}^{\mathrm{j}\eta_m} \end{bmatrix} \tag{9}$$

综上，矢量均匀圆阵的导向矢量$\boldsymbol{a}_m^{\mathrm{DPA}}$同时与入射信号的DOA和极化状态有关。

2.2 问题的来源

假设空间远场中有2个非相干信号源同时入射到以N个阵元组成的阵列，经典MUSIC算法[8]的空间谱函数P_{MUSIC}定义为：

$$P_{\text{MUSIC}}=\frac{1}{\frac{1}{N}\sum_{n=3}^{N}\left|\boldsymbol{a}^{\text{H}}\boldsymbol{v}_n\right|^2}=\frac{1}{Z_{\text{MUSIC}}}=\frac{1}{1-\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{2}\left|\boldsymbol{a}^{\text{H}}\boldsymbol{v}_n\right|^2}=\frac{1}{1-V_{\text{MUSIC}}} \tag{10}$$

式中：$\boldsymbol{a}$为导向矢量；$\boldsymbol{v}_n$为自相关矩阵$\boldsymbol{R}_x$特征值分解后的第n个特征值对应的特征向量；$Z_{\text{MUSIC}}=1-V_{\text{MUSIC}}$为MUSIC零谱；$V_{\text{MUSIC}}$为信号子空间。其中，$\boldsymbol{R}_x$的表达式：

$$\boldsymbol{R}_x=E\left[\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{\text{H}}\right]=\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}\boldsymbol{S}^{\text{H}}\boldsymbol{A}^{\text{H}}+\sigma_{\text{n}}^2\boldsymbol{I} \tag{11}$$

式中：$\boldsymbol{X}$为阵列接收信号模型；$\boldsymbol{A}$为阵列流型矩阵；$\boldsymbol{S}$为空间信号矢量；$\boldsymbol{I}$为对角矩阵；σ_{n}^2为噪声功率；$E[\cdot]$为求期望。

由于$\boldsymbol{R}_x$的各次特征值对应的特征向量与$\boldsymbol{A}^{\text{H}}$矩阵的两列正交，因此，经典MUSIC算法利用导向矢量$\boldsymbol{a}$在空域进行角度扫描，当$\boldsymbol{a}$与阵列流型矩阵$\boldsymbol{A}^{\text{H}}$的某一列线性$\boldsymbol{U}$相关时，有：

$$\boldsymbol{U}_N^{\text{H}}\boldsymbol{a}=0 \tag{12}$$

即

$$Z=0\equiv\boldsymbol{U}=1 \tag{13}$$

当$\boldsymbol{a}$与阵列流型矩阵$\boldsymbol{A}^{\text{H}}$的某一列线性不相关时，有：

$$\boldsymbol{U}_N^{\text{H}}\boldsymbol{a}\neq 0 \tag{14}$$

即

$$Z\neq 0\equiv\boldsymbol{U}\neq 1 \tag{15}$$

因此，在信噪比与快拍数无限大的条件下，自相关矩阵$\boldsymbol{R}_x$的估计是无偏的，所以Z_{MUSIC}在真实信号处也是无偏的，即理论值为零，且与信号特征参量差值无关。在阵列不存在测向模糊的情况下，MUSIC零谱Z_{MUSIC}在其他空域的谱值并不为零。根据角分辨力的定义，此时$Q_{\text{MUSIC}}(\varDelta)$必将大于0。因此，理论上经典MUSIC算法可以实现角度的超分辨。

然而，在实际应用中，阵列的自相关矩阵$\boldsymbol{R}_x$通常是根据有限快拍数T与信噪比(SNR)的观测数据获得的极大似然估计$\hat{R}_x$，即：

$$\hat{\boldsymbol{R}}_x=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\hat{\boldsymbol{X}}_t\hat{\boldsymbol{X}}_t^{\text{H}} \tag{16}$$

此时，MUSIC零谱在真实信号位置是有偏的，即不再等于零，而是一个较小的正数。该偏差源于阵列自相关矩阵估计的误差，与信噪比、采样点数、信号特征参量等因素均有关。显然零谱的偏差将导致谱函数估计角度超分辨能力的损失，因此，实际应用中经典MUSIC算法角分辨力应该是有限的；同时，当信号的来波方向不同时，其导向矢量$\boldsymbol{a}$也将不同，因此由MUSIC零谱的定义可知，在不同方向上谱函数的角分辨力必然也不同。

2.3 分辨角推导

根据角分辨力的定义，在有限快拍数与信噪比的情况下，研究在不同θ_1与θ_2入射角度下有偏MUSIC空间谱函数$\hat{P}_{\text{MUSIC}}(\theta)$角分辨力的期望值$E\left[\hat{Q}_{\text{MUSIC}}(\varDelta)\right]$：

$$E\left[\hat{Q}_{\text{MUSIC}}(\varDelta)\right]=\frac{E\left[\hat{P}_{\text{MUSIC}}^{1}(\theta_1)\right]+E\left[\hat{P}_{\text{MUSIC}}^{2}(\theta_2)\right]}{2}-E\left[\hat{P}_{\text{MUSIC}}^{\text{cen}}(\theta_{\text{cen}})\right] \tag{17}$$

其中$\theta_{\text{cen}}=(\theta_1+\theta_2)/2$，同时，根据式(10)中MUSIC零谱的定义$\hat{P}_{\text{MUSIC}}(\theta)=1/\hat{Z}_{\text{MUSIC}}(\theta)$，有：

$$E\left[\hat{Q}_{\mathrm{MUSIC}}(\varDelta)\right]=\frac{E\left[\dfrac{1}{\hat{Z}_{\mathrm{MUSIC}}^{1}(\theta_1)}\right]+E\left[\dfrac{1}{\hat{Z}_{\mathrm{MUSIC}}^{2}(\theta_2)}\right]}{2}-E\left[\frac{1}{\hat{Z}_{\mathrm{MUSIC}}^{\mathrm{cen}}(\theta_{\mathrm{cen}})}\right] \tag{18}$$

首先，考虑在自相关矩阵特征分解后的特征向量 $\boldsymbol{v}_n$ 和特征值 λ_n 中分别加入一定的估计误差量 $\boldsymbol{\xi}_n$ 与 ς_n：

$$\begin{cases}\hat{\boldsymbol{v}}_n=\boldsymbol{v}_n+\boldsymbol{\xi}_n\\ \hat{\lambda}_n=\lambda_n+\varsigma_n\end{cases},\quad n=1,2,\cdots,N \tag{19}$$

式中 $\hat{\boldsymbol{v}}_n$ 与 $\hat{\lambda}_n$ 分别表示有限采样的自相关矩阵 $\hat{\boldsymbol{R}}_x$ 特征值分解后的第 n 个特征向量及其特征值。根据式(10)有：

$$E\left[\hat{Z}_{\mathrm{MUSIC}}\right]=\boldsymbol{a}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}^{\mathrm{H}}\left(\sum_{n=1}^{M}\boldsymbol{v}_n\boldsymbol{v}_n^{\mathrm{H}}\right)\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}^{\mathrm{H}}E\left[\sum_{n=1}^{M}\boldsymbol{\xi}_n\boldsymbol{\xi}_n^{\mathrm{H}}\right]\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{a}^{\mathrm{H}}\,\mathrm{Re}\left\{E\left[\sum_{n=1}^{M}\boldsymbol{v}_n\boldsymbol{\xi}_n^{\mathrm{H}}\right]\right\}\boldsymbol{a} \tag{20}$$

由文献[9–11]中的推导可知：

$$E\left[\boldsymbol{\xi}_n\right]=E\left[\hat{\boldsymbol{v}}_n\right]-\boldsymbol{v}_n\approx-\frac{1}{2}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq n}}^{N}\frac{\lambda_n\lambda_i}{\left(\lambda_i-\lambda_n\right)^2T}\boldsymbol{v}_n \tag{21}$$

$$E\left[\boldsymbol{\xi}_i\boldsymbol{\xi}_l^{\mathrm{H}}\right]\approx\frac{\lambda_i}{T}\sum_{\substack{k=1\\ k\neq i}}^{N}\frac{\lambda_k}{\left(\lambda_i-\lambda_k\right)^2}\boldsymbol{v}_k\boldsymbol{v}_k^{\mathrm{H}}\delta_{il} \tag{22}$$

式中 δ_{il} 为引入估计误差量的方差，因此，MUSIC 零谱期望的表达式为：

$$E\left[\hat{Z}_{\mathrm{MUSIC}}\right]\approx\boldsymbol{a}^{\mathrm{H}}\left[\sum_{m=1}^{M}\sum_{\substack{k=1\\ k\neq m}}^{N}\frac{\lambda_m\lambda_k}{T\left(\lambda_m-\lambda_k\right)^2}\left(\boldsymbol{v}_k\boldsymbol{v}_k^{\mathrm{H}}-\boldsymbol{v}_m\boldsymbol{v}_m^{\mathrm{H}}\right)\right]\boldsymbol{a} \tag{23}$$

因此，当 $M=2$ 时，有：

$$E\left[\hat{Z}_{\mathrm{MUSIC}}^{1}\right]\approx\sigma_n^2\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{H}}\left[\frac{\lambda_1(N-2)}{\left(\lambda_1-\sigma_n^2\right)^2}\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_1^{\mathrm{H}}+\frac{\lambda_2(N-2)}{\left(\lambda_2-\sigma_n^2\right)^2}\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_2^{\mathrm{H}}\right]\boldsymbol{a}_1/T \tag{24}$$

$$E\left[\hat{Z}_{\mathrm{MUSIC}}^{2}\right]\approx\sigma_n^2\boldsymbol{a}_2^{\mathrm{H}}\left[\frac{\lambda_1(N-2)}{\left(\lambda_1-\sigma_n^2\right)^2}\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_1^{\mathrm{H}}+\frac{\lambda_2(N-2)}{\left(\lambda_2-\sigma_n^2\right)^2}\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_2^{\mathrm{H}}\right]\boldsymbol{a}_2/T \tag{25}$$

$$E\left[\hat{Z}_{\mathrm{MUSIC}}^{\mathrm{cen}}\right]\approx\sigma_n^2\boldsymbol{a}_{\mathrm{cen}}^{\mathrm{H}}\left[\frac{\lambda_1(N-2)}{\left(\lambda_1-\sigma_n^2\right)^2}\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_1^{\mathrm{H}}+\frac{\lambda_2(N-2)}{\left(\lambda_2-\sigma_n^2\right)^2}\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_2^{\mathrm{H}}\right]\boldsymbol{a}_{\mathrm{cen}}/T \tag{26}$$

由文献[12–13]可知：

$$\lambda_{1(2)}=\frac{1}{2}\left(P_1+P_2\right)\left[1\overset{+}{\underset{(-)}{}}\sqrt{1-\frac{4P_1P_2\left(1-|\boldsymbol{d}|^2\right)}{\left(P_1+P_2\right)^2}}\right]+\sigma_n^2 \tag{27}$$

$$\boldsymbol{v}_{1(2)}=\boldsymbol{a}_1+\frac{\lambda'_{1(2)}-P_1}{P_1|\boldsymbol{d}|}\boldsymbol{a}_2 \tag{28}$$

$$\lambda'_{1(2)}=\lambda_{1(2)}-\sigma_n^2 \tag{29}$$

$$\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{H}}\boldsymbol{a}_2 \tag{30}$$

式中 P_1 与 P_2 分别为信号源 1 与信号源 2 在谱函数中的功率值。

因此，可将不同阵列模型的导向矢量表达式(式(4)与式(6))代入式(23)中，讨论不同接收阵列与信号源参数设定下，空间中某一微小空域范围内的MUSIC零谱的期望值，并根据分辨力门限的定义得出相应的分辨角 $\varDelta$，即

满足：

$$\frac{E\left[\frac{1}{\hat{Z}_{\mathrm{MUSIC}}^{1}\left(\theta_{1}\right)}\right]+E\left[\frac{1}{\hat{Z}_{\mathrm{MUSIC}}^{2}\left(\theta_{2}\right)}\right]}{2}-E\left[\frac{1}{\hat{Z}_{\mathrm{MUSIC}}^{\mathrm{cen}}\left(\theta_{\mathrm{cen}}\right)}\right]=0 \tag{31}$$

临界条件下的 $\varDelta=\left|\theta_{1}-\theta_{2}\right|$。

对于具备二维测向能力的阵列，如本文研究的均匀圆阵模型，空间中的来波方向可由方位角和仰角唯一确定，因此以下仿真实验将在空间中选定某一固定方位角和仰角分别讨论矢量与标量均匀圆阵的MUSIC谱函数分辨角。

3　仿真实验分析

分别针对矢量及标量均匀圆阵模型开展Matlab仿真建模。首先通过最直观的谱图评估信噪比与快拍数对MUSIC算法角度分辨性能的影响，接收阵列及信号源参数值的设定分别如表1与表2所示。

表1 接收阵列参数设定

Table1 Array parameter settings

number of antennas	number of sources	radius/m	carrier frequency/GHz	R_{SN}/dB	snapshots	angular step/(°)
8	2	0.12	6	15	300	0.01

表2 信号源参数设定

Table2 Signal source parameter settings

	β/(°)	α/(°)	γ/(°)	η/(°)	amplitude ratio
signal source 1	72.3	32.3	10	110	1
signal source 2	72.7	32.7	60	30	1

由于对抗目标平台辐射源极化信息未知且多变，因此分别随机设定反辐射导弹导引头侦收到的2个信号源的极化参数。在以上信号的特征参数设定下，分别观察单次仿真下方位向和仰角向MUSIC算法的谱峰图。如图2与图3所示，对比左右两列可以看出，在相同的信噪比和快拍数情况下，矢量均匀圆阵的方位角与仰角分辨性能普遍优于标量均匀圆阵；同时，通过进一步提高信噪比和快拍数均能有效提升角度分辨性能。

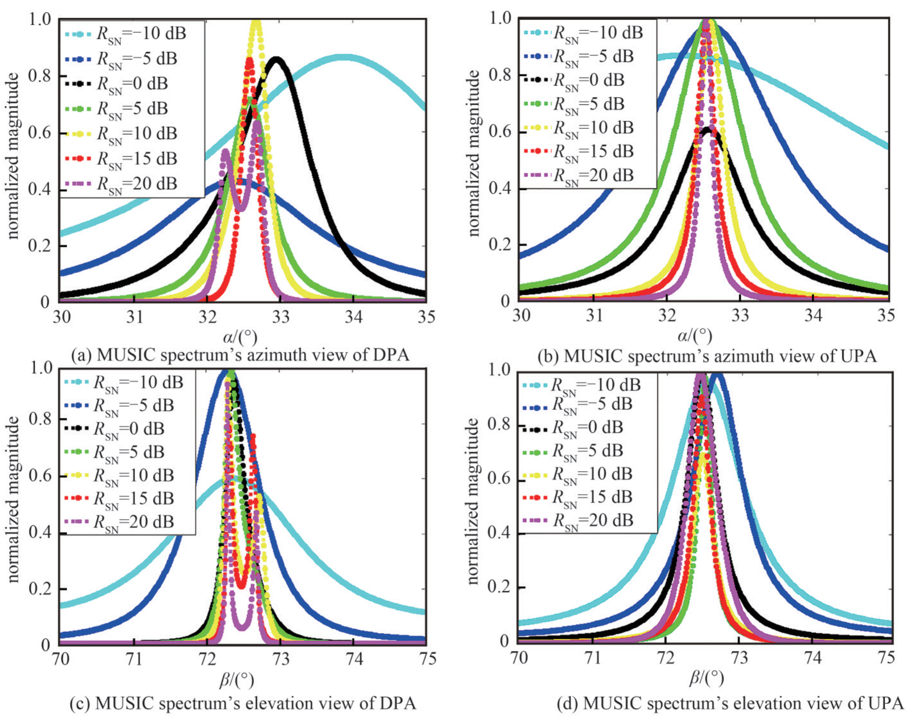


Fig.2 MUSIC spectra of DPA and UPA with different SNRs

图 2　不同信噪比的方位向与仰角向MUSIC谱图

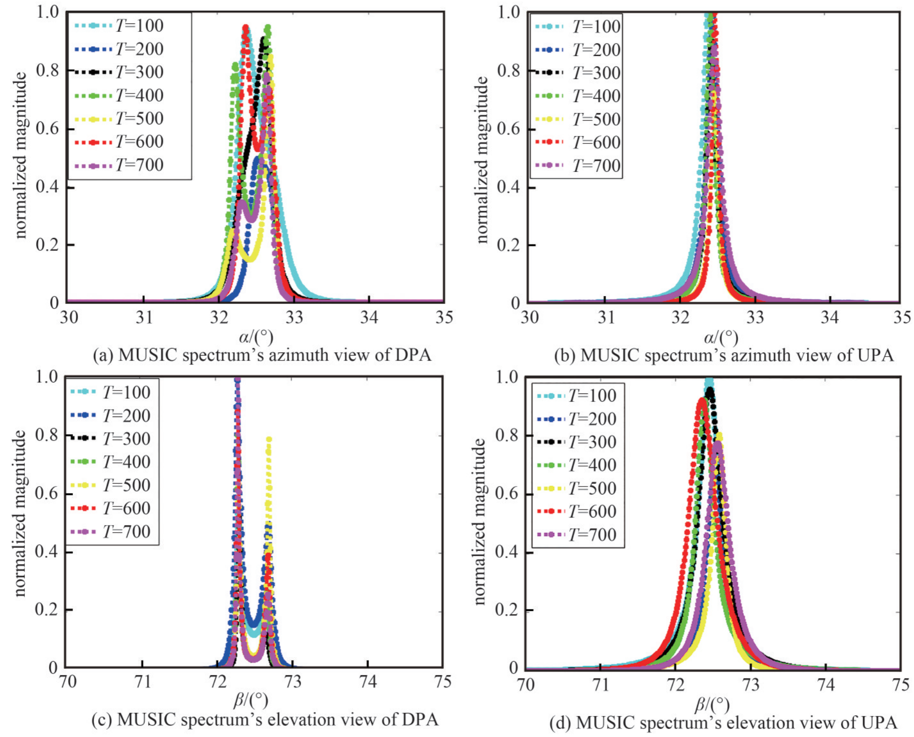


Fig.3 MUSIC spectra of DPA and UPA with different number of snapshots

图 3　不同快拍数的方位向与仰角向MUSIC谱图

进行Monte Carlo仿真实验，同样以角度(32.5°,72.5°)为中心按步长0.1°逐渐增加角度差值，对二维空间中每个角度分别进行200次随机试验，分辨角$\varDelta$取1σ统计值满足$\hat{Q}_{\mathrm{MUSIC}}(\varDelta)=0$的结果。

如图4所示，黑色菱形点表示角度中心，红色虚线圈与蓝色虚线圈分别表示标量均匀圆阵与矢量均匀圆阵在该角度中心处的分辨角临界值。根据分辨角的定义，假如2个信号的DOA参数均落在相应阵列的圈内里面，表示MUSIC算法无法分辨2个目标，可以看到，矢量均匀圆阵相对标量阵列的圈面积更小。因此，在该空间角度中心处，矢量均匀圆阵的MUSIC谱分辨角相对标量均匀圆阵更小，即角度分辨力更好。

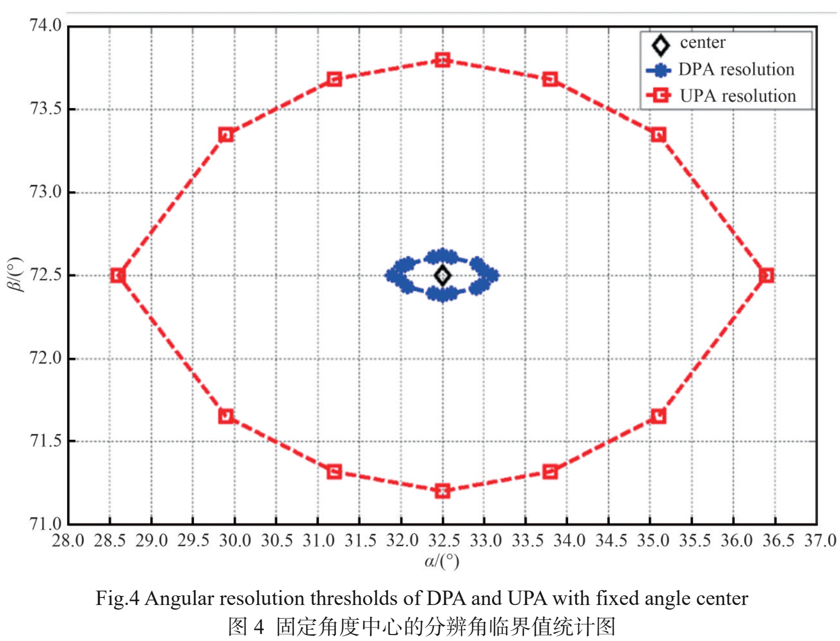
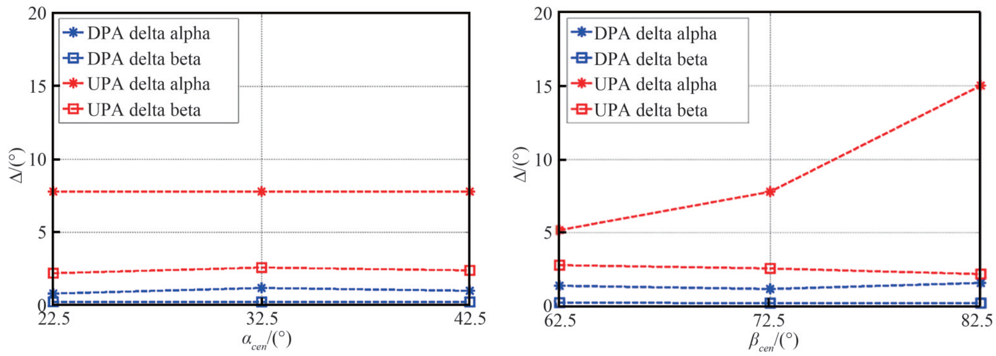


Fig.4 Angular resolution thresholds of DPA and UPA with fixed angle center

图 4　固定角度中心的分辨角临界值统计图

此外，通过对不同角度中心处方位向和仰角向的分辨角进行Monte Carlo仿真计算，如图5所示，在其他角度中心处，矢量均匀圆阵的MUSIC谱分辨力相对标量均匀圆阵，同样更好。



(a) angular resolution thresholds with different azimuth angles (b) angular resolution thresholds with different elevation angles

Fig.5 Angular resolution thresholds with azimuth and elevation angles

图 5 不同的角度中心处方位向与仰角向分辨角临界值统计图

4 结论

本文重点讨论了具有超分辨能力的MUSIC算法在阵列被动测向应用中的角分辨力问题。首先，确定了谱函数角分辨力的定义与分辨角门限；然后，在渐进有偏条件下利用MUSIC算法零谱的定义得出了不同阵列模型的分辨力表达式；最后，根据计算机建模与仿真结果定量分析了各参量对角分辨力的影响。通过仿真分析可以得出，在同样的阵列及信号源参数设定情况下，标量均匀圆阵的分辨角值均高于矢量均匀圆阵，特别是在仰角向上，标量均匀圆阵的分辨角约为矢量均匀圆阵的10倍。

根据文献[5]中的描述，在特定条件下，矢量阵列的角分辨力相比标量阵列，不仅存在快拍数门限、信噪比门限，还存在一定的极化分辨门限。因此，后续的工作中将在信号存在极化特征差异的情况下讨论基于矢量阵列的MUSIC算法角分辨力问题。同时，也将借助推导所得的矢量均匀圆阵信号分辨力表达式进一步研究满足一定分辨角条件的快拍数及信噪比门限。

此外，文献[14]中提到了矢量阵列相对标量阵列对阵列流形扰动更不敏感，这同样也是矢量阵列在实际应用中的一大优势。由于本文主要讨论的是由阵列协方差矩阵估计误差导致的阵列角分辨性能下降问题，系统工程应用中其他误差也会导致系统分辨性能下降，这些误差通常包括阵元间互耦、阵元位置偏差、通道幅相不一致等。因此，后续工作中仍需考察由实际应用误差模型导致的阵列流形扰动对谱估计算法角分辨力的影响。

参考文献:

[1] 吴迪,田茂,皮楚,等. 共形天线阵列极化分集问题[J]. 太赫兹科学与电子信息学报, 2018,16(3):445-451. (WU Di,TIAN Mao, PI Chu, et al. Polarization diversity of conformal antenna array[J]. Journal of Terahertz Science and Electronic Information Technology, 2018,16(3):445-451.) doi:10.11805/TKYDA201803.0445.

[2] 司锡才,赵建民. 宽频带反辐射导弹导引头技术基础[M]. 哈尔滨:哈尔滨工程大学出版社, 1996. (SI Xicai,ZHAO Jianmin. Fundamentals of wideband anti-radiation missile seeker[M]. Harbin,Heilongjiang,China:Harbin Engineering University Press, 1996.)

[3] SCHMIDT R. Multiple emitter location and signal parameter estimation[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1986,34(3):276-280. doi:10.1109/TAP.1986.1143830.

[4] 王永良,陈辉,彭应宁,等. 空间谱估计理论与算法[M]. 北京:清华大学出版社, 2004. (WANG Yongliang,CHEN Hui,PENG Yingning,et al. Theory and algorithm of spatial spectrum estimation[M]. Beijing,China:Tsinghua University Press, 2004.)

[5] FRIEDLANDER B. A sensitivity analysis of the MUSIC algorithm[J]. IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1990,38(10):1740-1751. doi:10.1109/29.60105.

[6] FRIEDLANDER B,WEISS A J. Performance of diversely polarized antenna arrays for correlated signals[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1992,28(3):869-879. doi:10.1109/7.256307.

[7] 徐振海,肖顺平,王雪松,等. 极化域-空域联合谱分辨力研究[J]. 信号处理, 2008,24(1):7-10. (XU Zhenhai,XIAO Shunping, WANG Xuesong, et al. The performance on resolving EM signals of joint spectrum in polarizational and spatial domains[J]. Signal Processing, 2008,24(1):7-10.) doi:10.3969/j.issn.1003-0530.2008.01.002.

[8] 徐振海. 极化敏感阵列信号处理的研究[D]. 长沙:国防科学技术大学, 2004. (XU Zhenhai. Signal processing based on polarization sensitive array[D]. Changsha,China:National University of Defense Technology, 2004.)

[9] BRILLINGER D R. Time series,data analysis and theory[M]. 3600 University City Science Center Philadelphia,PA:Society for

Industrial and Applied Mathematics,1981. doi:10.5555/501124.

[10] KAVEH M,BARABELL A. The statistical performance of the MUSIC and the minimum-norm algorithms in resolving plane waves in noise[J]. IEEE Transactions on Acoustics,Speech,and Signal Processing, 1986,34(2):331-341. doi:10.1109/TASSP.1986.1164815.

[11] ZHOU C,HABER F,JAGGARD D L. A resolution measure for the MUSIC algorithm and its application to plane wave arrivals contaminated by coherent interference[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1991,39(2):454-463. doi:10.1109/78.80829.

[12] HUDSON J E. Adaptive array principles[M]. New York:Peregrinus on behalf of the Institution of Electrical Engineers, 1981.

[13] FRIEDLANDER B,WEISS A J. The resolution threshold of a direction-finding algorithm for diversely polarized arrays[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1994,42(7):1719-1727. doi:10.1109/78.298279.

[14] 庄钊文. 极化敏感阵列信号处理[M]. 北京:国防工业出版社, 2005. (ZHUANG Zhaowen. Signal processing of polarization sensitive array[M]. Beijing,China: National Defense Industry Press, 2005.)

作者简介：

皮　楚(1987-)，男，硕士，工程师，主要研究方向为电子对抗信号处理与算法.email:pichu1987pp@icloud.com.

吴　迪(1987-)，女，博士，高级工程师，主要研究方向为电子对抗信号处理.

何昉明(1989-)，女，博士，高级工程师，主要研究方向为电子对抗干扰算法.

（上接第1116页）

[16] NOH S. Decision-making framework for autonomous driving at road intersections: safeguarding against collision, overly conservative behavior, and violation vehicles[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2019, 66(4): 3275-3286. doi:10.1109/TIE.2018.2840530.

[17] XU Jianliang, LOU Huaxun, ZHANG Weifeng, et al. An intelligent anti-jamming scheme for cognitive radio based on deep reinforcement learning[J]. IEEE Access, 2020(8):202563-202572. doi:10.1109/ACCESS.2020.3036027.

[18] BIN ISSA R,DAS M,RAHMAN M S,et al. Double deep Q-learning and faster R-CNN-based autonomous vehicle navigation and obstacle avoidance in dynamic environment[J]. Sensors, 2021,21(4):1468. doi:10.3390/s21041468.

作者简介：

刘晓明(1999-)，男，硕士，工程师，主要研究方向为通信智能抗干扰.email:249946858@qq.com.

杨　春(1972-)，男，博士，研究员，主要研究方向为通信与信息系统.

刘友江(1986-)，男，博士，研究员，主要研究方向为智能化无线电系统.

曹　韬(1985-)，男，博士，研究员，主要研究方向为无线测控通信.