

文章编号: 1672-2892(2012)05-0579-05

## 一种改进的用于稀疏表示的正交匹配追踪算法

王燕霞, 张 弓

(南京航空航天大学 电子信息工程学院, 江苏 南京 210016)

**摘 要:** 稀疏表示理论在军事目标识别、雷达目标参数估计等领域应用越来越广, 而目标信号的稀疏表示通常不唯一, 因此产生了大量的稀疏表示算法。本文基于现有稀疏表示算法的研究, 提出一种改进的正交匹配追踪(OMP)算法。首先采用非线性下降的阈值更快速地选择原子, 确定备选原子集, 提高了算法速度; 其次用正则化的二次筛选剔除备选原子集中能量较低的原子, 保证了算法精确度; 并设置迭代停止条件实现算法的稀疏度自适应。实验结果表明, 本文算法可以实现稀疏表示求解精确度和速度上的平衡, 求解速度比基追踪(BP)算法快, 精确度比 OMP、正则化 OMP(ROMP)、基于自适应 OMP 回溯(BAOMP)算法高。

**关键词:** 过完备字典; 稀疏表示; 正交匹配追踪; 正则化

**中图分类号:** TN850.6; TP753

**文献标识码:** A

## An improved orthogonal matching pursuit algorithm for sparse representation

WANG Yan-xia, ZHANG Gong

(College of Electronics and Information Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing Jiangsu 210016, China)

**Abstract:** Usually sparse representation of signal is not unique, which results in a large number of sparse representation algorithms. An improved Orthogonal Matching Pursuit(OMP) algorithm is proposed. The atoms are selected more quickly with nonlinear decline threshold and the set of alternative atoms is determined, which improves the algorithm speed. Regularized secondary screening can remove lower-energy atoms from the alternative atoms set to ensure the accuracy. A stop condition for iteration is preset to realize the adaptive sparsity of new algorithm. Simulation results show that, the improved algorithm can keep a balance between accuracy and speed for sparse solving with a faster speed than Basis Pursuit(BP) algorithm and a higher accuracy than OMP, Regularized OMP(ROMP) and Backtracking-based Adaptive OMP(BAOMP) algorithms.

**Key words:** over-complete dictionary; sparse representation; orthogonal matching pursuit; regularized

稀疏表示理论在军事目标识别<sup>[1]</sup>、雷达目标参数估计<sup>[2]</sup>等领域的应用越来越广, 2010 年 Vishal 和 Nasser 等人基于科曼奇族前视红外数据库将稀疏表示用于军事目标的识别, 稀疏求解的结果表明算法取得了较好的识别效果<sup>[1]</sup>。对于稀疏表示理论应用于各种目标信号处理来说, 信号的表示应该能对自身不同性质, 以及各性质间的差异提供明确信息, 这就促进了信号在基于大量波形的过完备字典上的分解<sup>[1]</sup>。然而过完备库中的波形数远远超过信号的维数, 因此它对给定信号的表示不是唯一的, 由此产生了信号处理工作中大量的稀疏表示算法。

基于过完备字典的稀疏表示起源于 20 世纪 90 年代, Mallat 和 Zhang 首次提出了匹配追踪(Matching Pursuit, MP)算法来解决该稀疏分解问题<sup>[3-4]</sup>, 通常这些算法可以分为 3 类: 基于  $l_p$  范数正则化的方法、迭代收缩算法和贪婪追踪算法。基于  $l_p$  范数正则化的方法通过求解在重构条件下系数的  $l_p$  范数最小化来寻找稀疏解, 此类比较典型的算法有基追踪(BP)<sup>[5]</sup>; 迭代收缩算法首先要获得系数的初始集, 然后迭代修正获得稀疏表示, 早期的这类方法有噪声整形(Noise Shaping, NS)<sup>[6]</sup>等; 贪婪追踪算法力求从字典中选取与余量最匹配的原子作为信号的近似表示, 并通过减去与该原子相关的分量来更新余量, 此类算法研究的成果较多, 典型的有 MP<sup>[5]</sup>, OMP<sup>[7]</sup>, ROMP<sup>[8]</sup>及 BAOMP<sup>[9]</sup>等。

收稿日期: 2011-12-14; 修回日期: 2012-02-09

基金项目: 航空基金资助项目(2011ZC52034)

BP 算法是稀疏表示的有效近似, 是一种全局优化算法, 但是线性规划的计算复杂度比较大, 因此在实际应用中通常不选择该算法实现稀疏求解; NS 所设置的阈值是线性递减的, 于是就需要预设一个阈值数组, 然而阈值数组长度的选择是个不确定问题, 数组过长则增加了迭代的次数, 数组过短则降低了抑制噪声的能力, 而且该算法降噪效果不好<sup>[4]</sup>; 作为贪婪算法, 匹配追踪类算法的主要思想是从过完备字典中选择最匹配的原子, 如何实现原子的快速精确选择是备受关注的问题。

## 1 稀疏表示理论

基于冗余字典的稀疏表示就是在一部过完备字典中能够找到一组最佳原子的线性组合最好的表示信号<sup>[10]</sup>。设  $y$  是长度为  $n$  的原始信号, 给定一个集合:

$$\Phi = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_M] \in \mathbb{R}^{N \times M} \quad (1)$$

其元素  $\varphi_i$  是维数为  $N$  的矢量, 若  $N \ll M$ , 则称集合  $\Phi$  为过完备字典, 其元素称为原子(或基函数)。对于任意给定的信号  $y \in \mathbb{R}^N$  都可以表示成原子  $\varphi_i$  的叠加:

$$y = \sum_{i=1}^M \varphi_i f_i = \Phi f \quad (2)$$

式中  $f$  为信号在过完备字典下的稀疏表示系数矢量。鉴于字典的冗余性, 矢量  $\varphi_i$  不再是线性独立的, 因此上式中信号  $y$  的表示不是唯一的, 而过完备稀疏表示就是从所有可能的表示中找出分解系数最为稀疏的一个。由于  $N \ll M$ , 该求解过程是一个病态的求解问题, 通常对信号的过完备稀疏求解建立如下模型:

$$\min \|f\|_0, \quad \text{s.t. } \|y - \Phi f\|_2 \leq \delta \quad (3)$$

匹配追踪类算法用于该模型的稀疏求解具有一定的稳定性<sup>[11]</sup>, 主要思想是通过迭代来计算  $y$  的支撑, 文献[3]中首次提出 MP 算法, 它将信号分解为冗余字典中部分原子的线性扩张, 然而该算法中信号在已选定原子集合上的投影是非正交的, 使得收敛需要经过较多次迭代; OMP<sup>[7]</sup>算法在 MP 的基础上, 通过递归地对已选择原子集合进行正交化, 保证了迭代的最优性, 使得迭代次数减小, 但正交化过程也带来了计算复杂性的增加; 为进一步提高迭代速度, Needell D 和 Vershynin D 提出了正则化的正交匹配追踪(ROMP)<sup>[8]</sup>算法, 该方法挑选多个原子作为候选集, 然后从候选集中按照正则化原则挑选出部分原子将其并入最终的支撑集; 然而 OMP, ROMP 都需已知信号的稀疏度, 实际应用中信号的稀疏度往往未知, 于是 Thong T Do 等人提出了对稀疏度自适应的稀疏自适应匹配追踪算法(Sparsity Adaptive Matching Pursuit, SAMP)<sup>[12]</sup>, 通过设置一个可变补偿, 逐步对信号稀疏度进行估计, SAMP 中自适应的过程对步长要求比较苛刻, 步长太小则增加了迭代次数, 降低了稀疏求解速度。BAOMP<sup>[9]</sup>算法比 OMP, ROMP 等具有更稀疏的信号重构和近似性能, 但对于不同的信号, BAOMP 算法所设置的前向阈值和后向阈值也不同, 不具有普适性。在正交匹配追踪算法基础上, 可使用非线性下降的阈值自适应地确定原子个数, 将这些原子作为备选原子集, 利用正则化方法对备选原子集做二次筛选, 保留能量较大的原子加入原子支撑集, 保证了算法稀疏求解的精度, 并设置迭代停止条件实现算法对稀疏度的自适应。

## 2 阈值非线性下降的正则化正交匹配追踪算法

文献[8]提出的 ROMP 算法对所有满足 RIP 条件的矩阵和稀疏信号都可以精确重建, 对于稀疏度为  $K$  的信号, 若余量与字典的相关系数为  $g \in \mathbb{R}^{M \times 1}$ , 选出其中  $K$  个最大的相关系数存入候选集  $J$ , 将  $J$  分成若干组, 对于任意一个分组  $A$ , 若满足所有的  $i, j \in A$ , 式(4)都成立:

$$|g_i| \leq 2|g_j|, \quad i, j \in A \quad (4)$$

则选择能量最大的一组子集  $A$  作为最终的索引值集, 选取该索引值集对应的原子集  $\Phi_A$ , 根据最小二乘法计算信号逼近  $\hat{f}$  及余量  $r_{\text{new}}$  的更新:

$$\hat{f} = \arg \min \|y - \Phi_A f\|_2 \quad (5)$$

$$r_{\text{new}} = y - \Phi_A \hat{f} \quad (6)$$

ROMP 算法的基本步骤如下:

- 1) 设置初始余量  $r_0 = f$ ,  $\hat{f}_0 = 0$ , 索引值集合  $A_0 = \emptyset$ , 估计信号稀疏度为  $K$ , 迭代次数初始值  $m = 1$ ;

2) 计算冗余字典与余量的乘积  $P_n = \Phi^T r_{n-1}$ , 求最大的  $K$  个索引值, 并根据式(4)确定最终索引值集合  $A_n$  及对应的原子集  $\Phi_{A_n}$ ;

3) 用式(5)计算信号逼近  $\hat{f}$ , 并根据式(6)更新余量  $r_{\text{new}}$ ;

4) 判断是否满足迭代终止条件  $|A| \geq 2K$ , 若不满足,  $m = m + 1$ , 转步骤 2)继续迭代计算。

ROMP 算法能保证没有入选支撑集的原子能量一定远小于最终支撑集中原子的能量, 是一种简单有效的原子筛选方法, 最多经过  $K$  次迭代便可以精确重建信号。然而该算法需预估信号的稀疏度, 这个问题利用 SAMP 算法可解决, 但是初始步长的设置是个难题。文献[6]提出一种噪声修正(NS)算法, 该算法在迭代过程中利用阈值的设置剔除较小的系数, 并通过正交互补空间映射来修正较大的系数以弥补误差, 所设置的阈值是线性递减的, 于是就需要预设一个阈值数组, 数组维数是个不确定问题, 而且该方法降噪效果比较差<sup>[4]</sup>。

本文提出一种基于阈值非线性下降的正则化二次筛选正交匹配追踪算法, 本文所设置的是非线性的指数下降阈值, 阈值随着迭代次数的增加逐渐逼近零而不为零, 这种呈指数下降的阈值可以实现迭代过程中原子候选集个数的自适应选择, 同时提高了稀疏求解的速度, 在重构计算前根据正则化的方法实现原子的二次筛选, 剔除能量较小的原子, 保证了稀疏求解的精确度。本文算法复杂度低于 BAOMP 算法, 没有后向追踪带来的二次重构计算, 与 ROMP 算法相比, 本文方法不需要已知稀疏度, 具体步骤如下:

1) 计算初始的相关系数, 记最大相关系数为  $\max$ , 设置下降指数  $a$ ,  $0 < a < 1$ ;

2) 设置初始余量  $r_0 = f$ ,  $\hat{f}_0 = 0$ , 原子备选集  $C_0 = \emptyset$ , 每次迭代的正确估计支撑集  $\Gamma = \emptyset$ , 最终支撑集  $A = \emptyset$ , 迭代次数初始值  $m = 1$ ;

3) 确定原子备选集  $C_m$  满足  $\left| \langle r_{m-1}, \Phi_{C_m} \rangle \right| \geq a_m \times \max \left| \langle r_0, \Phi \rangle \right|$ , 其中  $|C_m| \leq M - |A|$ ;

4) 根据式(4)对该索引值集合中的原子集做正则化二次筛选, 筛选结果为  $\Gamma$ , 确定最终索引值集合  $A = A \cup \Gamma$ , 及对应的原子集  $\Phi_A$ ;

5) 用式(5)计算信号逼近  $\hat{f}$ , 并根据式(6)更新余量  $r_{\text{new}}$ ;

6) 预设一个阈值  $T > 0$ , 判断是否满足迭代终止条件  $\|r_{\text{new}}\| \leq T$ , 若不满足, 则  $m = m + 1$ , 转步骤 3)继续迭代计算; 若满足, 则迭代终止。

### 3 实验比较及分析

#### 3.1 一维理想信号重建

通过理想信号的稀疏重建分析 OMP, ROMP, BAOMP, BP 及本文算法对信号的恢复准确率。

构造一个随机的  $30 \times 60$  大小的测量矩阵  $A$ , 矩阵元素在  $[-1, 1]$  上均匀分布, 对  $A$  的每一列归一化处理。构造一个已知信号  $c \in \mathbb{R}^{60 \times 1}$ , 任意选择  $c$  的 6 个位置, 把这些位置的值设为大于 10 小于 40 的随机整数, 那么信号的稀疏度为 6, 合成的信号为  $f = Ac \in \mathbb{R}^{30 \times 1}$ 。由于已知信号本身就是稀疏的, 因此  $A$  即可看成过完备字典, 要求解的是  $f$  基于该过完备字典下的稀疏表示系数。

给定合成信号  $f$  和过完备字典  $A$ , 分别计算各算法对原信号的恢复结果, 剔除结果中小于 1 的值, 计算恢复结果中的非零系数, 若非零稀疏的个数等于预设的稀疏度, 则认为识别正确。为了使观察结果趋于稳定, 重复实验 1 000 次, 比较各种算法对信号恢复的系数中非零个数所占的百分比(Percentage Number of Non-zero Coefficient, PNNC)及所花费的时间。OMP 最大迭代次数设为稀疏度的 2 倍, 本文算法指数参数设置为  $a = 0.7$ , 求解系数的直方图如图 1, 其中  $x$  轴为非零系数的个数,  $y$  轴表示 1 000 次实验后各非零系数的百分比, 其中  $x = 6$  时的  $y$  值即为恢复准确率。

虽然合成信号  $f$  是由  $Ac$  产生的, 但恢复出来的结果却不完全与  $c$  相等, 因为字典  $A$  和已知信号  $c$  的值都是随机产生的。OMP 算法的恢复准确率为 91.6%, 算法总共用时 7.11 s, ROMP 算法的恢复准确率为 93.8%, 算法总共用时 4.99 s, BAOMP 算法的恢复准确率为 93.1%, 算法总共用时 4.70 s, BP 算法的恢复准确率为 99%, 算法总共用时 21.16 s, 本文算法的恢复准确率为 97.4%, 算法总共用时 4.97 s。

从实验结果可以看出, OMP 算法对理想信号的恢复性能较低, 每步迭代只选择一个匹配原子, 降低了它的求解速度; ROMP 和 BAOMP 是 OMP 算法基础上的改进, 在恢复准确率和计算速度上都得到了提高; BP 算法其高复杂度的计算对信号的重构性能是最好的, 但花费的时间较长, 影响了算法的实时性。本文基于阈值非线性下

降的正则化二次筛选正交匹配追踪算法对理想稀疏信号的恢复准确率达到 97.4%，高出其他的贪婪算法，在时间上仅为 BP 算法的 1/4，因此，本文算法对于理想信号的恢复具有优势。

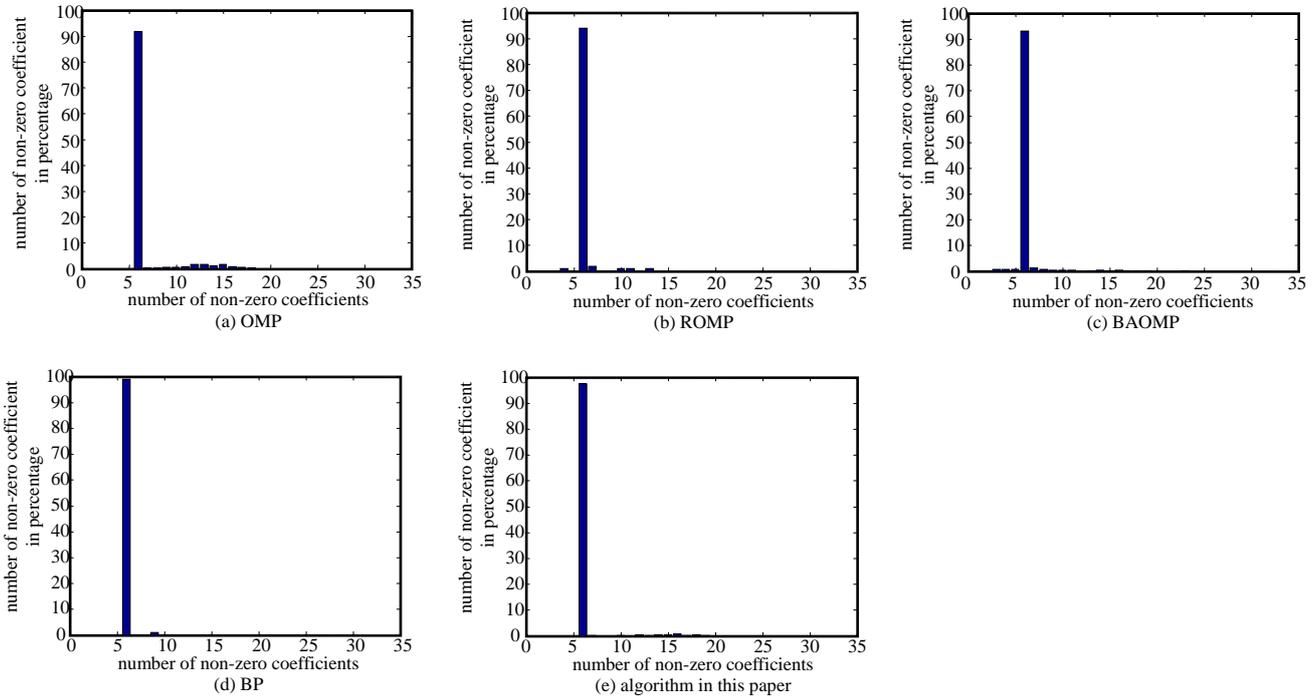


Fig.1 Ideal recovery histogram of each algorithm  
图1 各算法的理想恢复直方图

3.2 二维图像重建

通常信号在给定字典下的最稀疏表示是未知的，为了普适地说明，本文对图像 *house* 进行测试，依然采用高斯矩阵对其测量，离散余弦变换矩阵作为稀疏矩阵，重构采样后的图像，比较恢复结果。

图像大小为  $256 \times 256$ ，将图像划分为  $16 \times 16$  大小的子图像，共产生 256 个子图像，将每个子图像按列展开成一维矢量，使用大小为  $128 \times 256$  的高斯矩阵对每列矢量进行测量，从测量值中分别使用 OMP,ROMP,BAOMP,BP 和本文算法恢复重构子图像，由 256 个子图像合成原大小图像，结果见图 2。

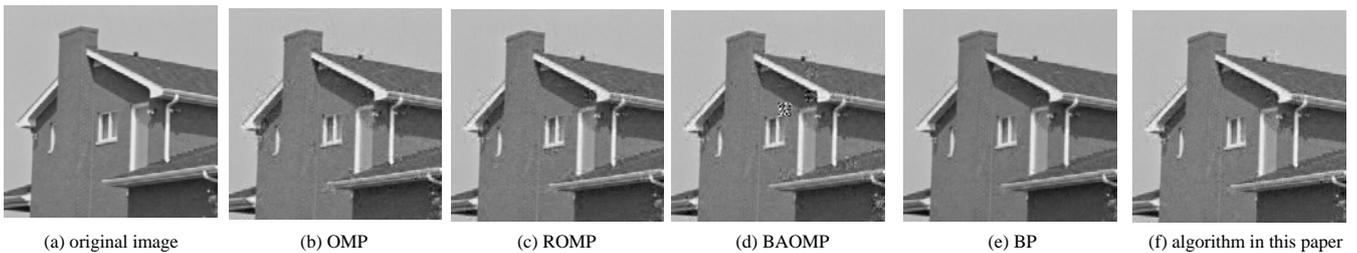


Fig.2 Reconstruction results for image of each algorithm  
图2 各算法对图像的重建结果

为进一步说明图 2 所示结果，表 1 给出了对图像分块处理时 OMP 算法、ROMP 算法、BAOMP 算法、BP 算法及本文算法对图像 *house* 重建质量指标：峰值信噪比(PSNR)、相对误差及所用时间。

表1 各算法重建质量对比

| Table1 Reconstruction quality comparison of each algorithm |          |                |            |
|--|----------|----------------|------------|
| algorithm  | PSNR/dB  | relative error | run time/s |
| OMP  | 28.871 6 | 0.071 4        | 35.65      |
| ROMP   | 29.284 4 | 0.067 7        | 12.27      |
| BAOMP  | 23.967 4 | 0.114 1        | 9.18       |
| BP   | 31.752 7 | 0.051 3        | 49.38      |
| algorithm in this paper                                    | 29.444 0 | 0.066 7        | 11.80      |

从图 2(a)~图 2(f)及表 1 中可以看出，BP 算法对图像的重建性能最好，但由于其算法的复杂性恢复所用的时

间为 49.38 s, 是最长的; OMP 算法对图像重构峰值性噪比达到 28.871 6, 但对房屋屋檐及屋顶边缘的重构出现明显的噪声, 而且该算法需预设稀疏度, 由于稀疏度未知, 本文设置 OMP 最大迭代次数为测量数, 因此 OMP 算法的运行时间也较长, 为 35.65 s; BAOMP 算法在处理该图像时虽然用时短, 但相对误差较大, 图像中出现明显的子图像重构错误, 说明在处理不同信号时, BAOMP 算法的阈值设置还应具有自适应性, 才能推广该算法的使用; 本文基于阈值非线性下降的正则化二次筛选算法虽然在相对误差上近似 ROMP 算法, 但计算时间和峰值信噪比都得到了提高。实验数据表明, 本文改进的算法较以往算法可以实现速度和重构精确度上的平衡, 是一种具有一定优势的改进算法。

#### 4 结论

信号基于过完备字典的表示是非唯一的, 由此带来大量的稀疏求解算法。本文在深入研究已有的匹配追踪算法的基础上, 提出一种改进的正交匹配追踪算法, 首先采用非线性下降的阈值更快速地选择原子, 提高算法速度, 其次利用正则化方法对原子集做二次筛选, 保证了算法精确度, 并设置迭代停止条件实现算法的稀疏度自适应。对一维信号及二维图像的仿真实验结果表明, 本文提出的算法在速度上优于 BP 算法, 在重构精确度上高于其他匹配追踪算法, 综合考虑了稀疏表示求解精确度和速度, 具有一定优势。

#### 参考文献:

- [1] Patel V M, Nasrabadi N M, Chellappa R. Sparsity Inspired Automatic Target Recognition[C]// Proceedings of SPIE, Vol. 7696, 76960Q. Florida: SPIE, 2010:1-8.
- [2] Chen Chunyang, Vaidyanathan P P. Compressed Sensing in MIMO Radar[C]// 42nd Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers. Taipei:[s.n.], 2008:41-44.
- [3] Mallat S G, Zhang Z. Matching Pursuits with Time-Frequency Dictionaries[J]. IEEE Transaction on Signal Processing, 1993, 41(12):3397-3415.
- [4] Yang Jingyu, Peng Yigang, Xu Wenli, et al. Ways to Sparse Representation: A Comparative Study[J]. Tsinghua Science and Technology, 2009, 14(4):434-443.
- [5] Chen S S, Donoho D L, Saunders M A. Atomic Decomposition by Basis Pursuit[J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 1998, 20(1):3-61.
- [6] Reeves T H, Kingsbury N G. Overcomplete Image Coding using Iterative Projection-based Noise Shaping[C]// Proceedings of International Conference on Image Processing. NY:[s.n.], 2002:597-600.
- [7] Joel A Tropp, Anna C Gilbert. Signal Recovery from Partial Information via Orthogonal Matching Pursuit[J]. 2000 Mathematics Subject Classification, 2005:1-18.
- [8] Needell D, Vershynin D. Uniform Uncertainty Principle and Signal Recovery via Regularized Orthogonal Matching Pursuit[J]. Foundations of Computational Mathematics, 2009, 9(3):317-334.
- [9] Huang Honglin, Anamitra makur. Backtracking-Based Matching Pursuit Method for Sparse Signal Reconstruction[J]. IEEE Transaction on Signal Processing Letters, 2011, 18(7):391-394.
- [10] Zhang Chunmei, Yin Zhongke, Chen Xiangdong, et al. Signal Overcomplete Representation and Sparse Decomposition Based on Redundant Dictionaries[J]. Chinese Science Bulletin, 2005, 50(23):2672-2677.
- [11] Donoho D L, Elad M, Temlyakov V N. Stable Recovery of Sparse Overcomplete Representations in the Presence of Noise[J]. IEEE Transaction on Information Theory, 2006, 52(1):6-18.
- [12] Thong T Do, Lu Gan, Nam Nguyen, et al. Sparsity Adaptive Matching Pursuit Algorithm for Practical Compressed Sensing[C]// Asilomar Conference on Signals, Systems, and Computers. Pacific Grove, CA:[s.n.], 2008:581-587.

#### 作者简介:



王燕霞(1987-), 女, 江苏省东台市人, 在读硕士研究生, 主要研究方向为雷达信号处理。  
email:wangyxsuda@yahoo.cn.

张弓(1964-), 男, 江苏省东台市人, 博士, 教授, 主要研究领域为雷达信号处理。