文章编号：2095-4980(2017)04-0565-07

基于状态空间法的宽带阵列雷达三维参数联合估计

刘　巍，汤　俊，张　宁
(清华大学　电子工程系，北京　100084)

摘　要： 基于状态空间方法提出了一种适用于宽带阵列雷达距离、速度和角度三维参数的联合估计方法。根据宽带阵列雷达三参数信号模型，给出对应参数估计的克拉美罗下界(CRLB)；通过构造广义Hankel矩阵，将现有的状态空间方法推广到三维参数联合估计问题上。实验仿真表明，该方法对于雷达三维参数联合估计是有效的，可一致逼近CRLB，且比传统快速傅里叶逆变换(IFFT)方法具有更好的参数估计和目标分辨性能。

关键词： 宽带阵列；状态空间法；参数估计；克拉美罗界
中图分类号： TN957　　**文献标志码：** A　　**doi：** 10.11805/TKYDA201704.0565

Three parameters joint estimation of wideband array radar based on State-Space method

LIU Wei，TANG Jun，ZHANG Ning
(Department of Electronic Engineering，Tsinghua University，Beijing 100084，China)

Abstract: In this paper a new method that based on state space estimation method is proposed to make joint estimation of the three parameters of range, velocity and angle for multi targets. According to the signal model of wideband array radar, we derived the Cramer-Rao Low Bound(CRLB) of these parameters, via constructing generalized Hankel matrix, we extend the sate space method into three dimension parameters. Numerical simulations show that the proposed method is an efficient method to estimate these parameters, which can uniformly approach to the CRLB. Meanwhile, compared to convention IFFT method, the proposed State-Space(SS) method gain better estimation and resolution property.

Keywords: wideband array；state space；parameter estimation；Cramer-Rao Low Bound

宽带雷达信号处理是雷达领域的研究热点[1-3]。相比窄带雷达，宽带雷达在提高作用距离的同时，可进一步提高距离分辨力和高角度分辨力，获得更为精细的目标信息。对于目标距离、角度、速度等参数的估计是雷达的基本任务。针对宽带雷达参数估计，目前主要有快速傅里叶变换(Fast Fourier Transformation，FFT)[4]、宽带聚焦矩阵算法，如双边相关变换[5]，旋转信号子空间[6]等。作为一种鲁棒的高精确度参数估计算法，近年来状态空间法(SS)[7-9]在诸多领域得到了广泛研究和应用。文献[7]首次通过奇异值分解将 SS 应用到谐波估计中。文献[8]验证了 SS 对噪声的不敏感性。随后有学者将 SS 应用到雷达参数估计[9-11]。其中，文献[9]将 SS 从宽带信号单脉冲场合扩展到多脉冲场合。本文将 SS 应用于宽带阵列雷达中目标距离、速度和角度三维参数联合估计。

1　宽带阵列雷达三维参数联合估计

1.1　宽带阵列雷达三维参数估计信号模型

考虑发射相参脉冲串信号的宽带阵列雷达，雷达载频为 f_0，接收天线为 M 阵元均匀线阵阵列，阵列间距为 d，脉冲重复周期为 T，K 个脉冲构成一个相参处理间隔。不失一般性，假定雷达探测场景中存在 S 个散射点，其相对于阵列的距离、径向速度及与阵列法向所成的角度分别记为 $r_s,\dot{r}_s,u_s$ ($u_s=\sin\theta_s$)。当雷达发射信号 $f(t)$，第 m_0 个阵元在第 k_0 个脉冲重复周期接收到的信号 $f_{k_0,m_0}(t)$ 为：

收稿日期：2016-04-22；修回日期：2016-05-12

$$f_{k_0,m_0}(t)=\sum_{s=1}^{S}\Gamma_s f(t-\tau_s)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\left(\frac{2f_0\dot{r}_s}{c}k_0T\right)}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\left(\frac{f_0u_s}{c}m_0d\right)},\quad k_0=0,1,\cdots,K-1;\ m_0=0,1,\cdots,M-1 \tag{1}$$

式中：Γ_s 为第 s 个散射点的雷达散射截面积(Radar Cross Section，RCS)系数，τ_s 为第 s 个散射点对应的时延，$\tau_s=2r_s/c$；r_s 为第 s 个散射点到雷达的距离；c 为光速。

对接收到的信号 $f_{k_0,m_0}(t)$ 进行时域匹配滤波得到 $g_{k_0,m_0}(t)$ 为：

$$g_{k_0,m_0}(t)=\sum_{s=1}^{S}\Gamma_s f^*(-t)*f(t-\tau_s)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\left(\frac{2f_0\dot{r}_s}{c}k_0T\right)}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\left(\frac{f_0u_s}{c}m_0d\right)} \tag{2}$$

对 $g_{k_0,m_0}(t)$ 作傅里叶变换可得

$$g_{k_0,m_0}(f)=\sum_{s=1}^{S}\Gamma_s\left|F\left(f\right)\right|^2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\left(\frac{2r_s}{c}f\right)}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\left(\frac{2f_0\dot{r}_s}{c}k_0T\right)}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\left(\frac{f_0u_s}{c}m_0d\right)} \tag{3}$$

式中 $F\left(f\right)$ 为发射信号 $f(t)$的频谱。

假设雷达发射带宽为 B 的宽带信号，其覆盖的频率范围可用下标表示为 $n_0\Delta f,n_0\in[0,N-1]$ 且具备带内平坦特性。不失一般性，可令 $\left|\mathrm{F}\left(f\right)\right|^2=1$，此时回波信号在频域可以离散化为：

$$g_{n_0,k_0,m_0}=\sum_{s=1}^{S}\Gamma_s\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\left(\frac{2r_s}{c}n_0\Delta f\frac{2f_0\dot{r}_s}{c}k_0T+\frac{f_0u_s}{c}m_0d\right)} \tag{4}$$

1.2 参数估计 CRLB

克拉美罗下界(CRLB)是最常用无偏估计器的均方误差下界。本节基于式(4)中给出的频域信号模型推导单散射点距离、速度、角度三维参数估计的 CRLB。式(4)中的观测模型包含的未知参数包括 RCS 幅度值、RCS 相位、距离、速度和角度，即 $\boldsymbol{\theta}\triangleq\left[A\ \varphi\ r\ \dot{r}\ u\right]^{\mathrm{T}}$。为方便后续推导，首先将宽带阵列雷达多通道、多周期的频域采样信号以矢量形式表示为：

$$\boldsymbol{z}=\boldsymbol{g}+\boldsymbol{n} \tag{5}$$

式中：$\boldsymbol{z}\in\boldsymbol{C}^{N\times K\times M}$，$\boldsymbol{n}$ 为服从 $N(0,\sigma^2\boldsymbol{I}_{N\times K\times M})$ 分布的加性高斯白噪声，$\boldsymbol{g}\in\boldsymbol{C}^{N\times K\times M}$ 是理想回波信号。根据式(4)，理想回波信号中各变量可以表示为：

$$g_{n_0,k_0,m_0}=A\mathrm{e}^{\left[-\mathrm{j}2\pi\left(\frac{2r}{c}n_0\Delta f+\frac{2f_0\dot{r}}{c}k_0T+\frac{f_0u}{c}m_0d\right)+j\varphi\right]},\quad n_0=0,1,\cdots,N-1;\quad k_0=0,1,\cdots,K-1;\quad m_0=0,1,\cdots,M-1 \tag{6}$$

式中：A 为 RCS 幅度值；φ 为 RCS 相位。则 $\boldsymbol{z}$ 的概率密度函数为：

$$p_{\boldsymbol{z}|\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{z})=\prod_{n_0=0}^{N-1}\prod_{k_0=0}^{K-1}\prod_{m_0=0}^{M-1}\frac{1}{\pi\sigma^2}\mathrm{e}^{-\left(z_{n_0,k_0,m_0}-g_{n_0,k_0,m_0}\right)^{\mathrm{H}}\left(z_{n_0,k_0,m_0}-g_{n_0,k_0,m_0}\right)/\sigma^2} \tag{7}$$

其对数形式如下：

$$L_z(\boldsymbol{\theta})=\ln p_{\boldsymbol{z}|\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{z})=-\ln(\pi\sigma^2)-\frac{1}{\sigma^2}\sum_{n_0=0}^{N-1}\sum_{k_0=0}^{K-1}\sum_{m_0=0}^{M-1}\left(z_{n_0,k_0,m_0}-g_{n_0,k_0,m_0}\right)^{\mathrm{H}}\left(z_{n_0,k_0,m_0}-g_{n_0,k_0,m_0}\right) \tag{8}$$

由式(8)得 Fisher 信息矩阵的元素为[9]：

$$\boldsymbol{J}_{v,w}\triangleq-E\left[\frac{\partial L_z(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_v}\frac{\partial L_z(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_w}\right]=-E\left[\frac{\partial^2L_z(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_v\partial\theta_w}\right] \tag{9}$$

根据式(9)，Fisher 信息矩阵 $\boldsymbol{J}$ 可表示为：

$$\boldsymbol{J} \triangleq \begin{bmatrix} J_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_{2,2} & J_{2,3} & J_{2,4} & J_{2,5} \\ 0 & J_{3,2} & J_{3,3} & J_{3,4} & J_{3,5} \\ 0 & J_{4,2} & J_{4,3} & J_{4,4} & J_{4,5} \\ 0 & J_{5,2} & J_{5,3} & J_{5,4} & J_{5,5} \end{bmatrix} \tag{10}$$

通过式(10)，对矩阵 $\boldsymbol{J}$ 求逆得到矩阵 $\boldsymbol{C}_{\mathrm{CR}}(\boldsymbol{\theta})$ 为：

$$\boldsymbol{C}_{\mathrm{CR}}(\boldsymbol{\theta}) \triangleq \boldsymbol{J}^{-1} = \begin{bmatrix} C_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{2,2} & C_{2,3} & C_{2,4} & C_{2,5} \\ 0 & C_{3,2} & C_{3,3} & C_{3,4} & C_{3,5} \\ 0 & C_{4,2} & C_{4,3} & C_{4,4} & C_{4,5} \\ 0 & C_{5,2} & C_{5,3} & C_{5,4} & C_{5,5} \end{bmatrix} \tag{11}$$

式中 $C_{3,3}, C_{4,4}$ $C_{5,5}$ 分别为参数 $r, \dot{r}, u$ 标准协方差的 CRLB。

2　基于状态空间法的雷达目标参数估计

基于线性系统状态空间模型的广义 Hankel 矩阵，构建步骤以及基于奇异值分解的参数提取算法。状态空间模型是线性系统常用模型。状态空间法是将目标回波函数转化为状态空间模型，利用状态空间模型构造 Hankel 矩阵，之后通过对 Hankel 矩阵奇异值分解得到雷达参数的估计值。

状态空间模型可用状态转移方程和观测方程表示：

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_{n+1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_n + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_n \\ \boldsymbol{y}_n = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}_n + \boldsymbol{u}_n \end{cases} \quad n = 0,1,2,\cdots \tag{12}$$

式中：$\boldsymbol{u}_n$ 为输入向量；$\boldsymbol{y}_n$ 为输出向量；$\boldsymbol{x}_n$ 为状态向量；$\boldsymbol{A}$ 为系统状态变化矩阵。

考虑初始状态为零且输入为冲激函数的单输入单输出系统，即

$$u_n = \delta_n = \begin{cases} 1, n = 0 \\ 0, n \neq 0 \end{cases}, \quad x_0 = 0 \tag{13}$$

由式(12)~式(13)可得各时刻的系统输出为：

$$\begin{cases} y_0 = 1, \boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{B} \\ y_1 = \boldsymbol{C}\boldsymbol{B}, \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} \\ \quad\vdots \\ y_n = \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B}, n \geqslant 1 \end{cases} \tag{14}$$

将式(4)改写为状态空间模型形式，即

$$g_{n_0,k_0,m_0} = \sum_{s=1}^{S} \varGamma_s \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\left(\frac{2r_s}{c}n_0\Delta f \frac{2f_0\dot{r}_s}{c}k_0T + \frac{f_0u_s}{c}m_0d\right)} =$$

$$\left[\varGamma_1, \varGamma_2, \cdots, \varGamma_S\right] \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{4\pi r_1\Delta f}{c}} & 0 & \cdots \\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{4\pi r_2\Delta f}{c}} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}^{n_0} \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{4\pi f_0\dot{r}_1T}{c}} & 0 & \cdots \\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{4\pi f_0\dot{r}_2T}{c}} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}^{k_0} \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi f_0u_1d}{c}} & 0 & \cdots \\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi f_0u_2d}{c}} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}^{m_0} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \triangleq \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}_r^{n_0}\boldsymbol{A}_{\dot{r}}^{k_0}\boldsymbol{A}_u^{m_0}\boldsymbol{B} \tag{15}$$

式(15)中对角矩阵 $\boldsymbol{A}_r, \boldsymbol{A}_{\dot{r}}, \boldsymbol{A}_u$ $\boldsymbol{A}$ 分别携带了多个散射点的距离、速度和角度信息。

为方便通过矩阵分解求取目标参数，将上节所述的方法进行扩展。具体来说，利用上述三维数据矩阵构造广义 Hankel 矩阵[9]

$$\boldsymbol{H} = \underset{n_0,k_0,m_0}{\boldsymbol{H}}\left(g_{n_0,k_0,m_0}\right) = \underset{m_0}{\boldsymbol{H}}\left\{\underset{k_0}{\boldsymbol{H}}\left\{\underset{n_0}{\boldsymbol{H}}\left(g_{n_0,k_0,m_0}\right)\right\}\right\} \tag{16}$$

式中 $\underset{n_0}{\boldsymbol{H}}\left(g_{n_0,k_0,m_0}\right)$ 表示通过固定 m_0,k_0，变化 n_0 构造维度为 $N_n \times (N - N_n + 1)$ 的 Hankel 矩阵，即

$$\underset{n_0}{\boldsymbol{H}}\left(g_{n_0,k_0,m_0}\right) \triangleq \begin{bmatrix} g_{n_0+0,k_0,m_0} & g_{n_0+1,k_0,m_0} & \cdots & g_{n_0+N-N_n,k_0,m_0} \\ g_{n_0+1,k_0,m_0} & g_{n_0+2,k_0,m_0} & \cdots & \cdots \\ \vdots & & & \vdots \\ g_{n_0+N_n-1,k_0,m_0} & \cdots & \cdots & g_{n_0+N-1,k_0,m_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}_r^{n_0+0}\boldsymbol{A}_{\dot{r}}^{k_0}\boldsymbol{A}_u^{m_0}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}_r^{n_0+1}\boldsymbol{A}_{\dot{r}}^{k_0}\boldsymbol{A}_u^{m_0}\boldsymbol{B} & \cdots & \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}_r^{n_0+N-N_n}\boldsymbol{A}_{\dot{r}}^{k_0}\boldsymbol{A}_u^{m_0}\boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}_r^{n_0+1}\boldsymbol{A}_{\dot{r}}^{k_0}\boldsymbol{A}_u^{m_0}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}_r^{n_0+2}\boldsymbol{A}_{\dot{r}}^{k_0}\boldsymbol{A}_u^{m_0}\boldsymbol{B} & \cdots & \cdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}_r^{n_0+N_n-1}\boldsymbol{A}_{\dot{r}}^{k_0}\boldsymbol{A}_u^{m_0}\boldsymbol{B} & \cdots & \cdots & \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}_r^{n_0+N-1}\boldsymbol{A}_r^{k_0}\boldsymbol{A}_u^{m_0}\boldsymbol{B} \end{bmatrix} \tag{17}$$

$\underset{k_0}{\boldsymbol{H}}\left\{\underset{n_0}{\boldsymbol{H}}\left\{g_{n_0,k_0,m_0}\right\}\right\}$表示固定 m_0，通过变化 k_0，由 $N_k \times (K-N_k+1)$ 个式(17)所示的 Hankel 矩阵构成的广义 Hankel 矩阵：

$$\underset{k_0}{\boldsymbol{H}}\left\{\underset{n_0}{\boldsymbol{H}}\left(g_{n_0,k_0,m_0}\right)\right\} \triangleq \begin{bmatrix} \underset{n_0}{\boldsymbol{H}}\left\{g_{n_0,k_0+0,m_0}\right\} & \underset{n_0}{\boldsymbol{H}}\left\{g_{n_0,k_0+1,m_0}\right\} & \cdots & \underset{n_0}{\boldsymbol{H}}\left\{g_{n_0,k_0+K-N_k,m_0}\right\} \\ \underset{n_0}{\boldsymbol{H}}\left\{g_{n_0,k_0+1,m_0}\right\} & \underset{n_0}{\boldsymbol{H}}\left\{g_{n_0,k_0+2,m_0}\right\} & \cdots & \cdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \underset{n_0}{\boldsymbol{H}}\left\{g_{n_0,k_0+N_k-1,m_0}\right\} & \cdots & \cdots & \underset{n_0}{\boldsymbol{H}}\left\{g_{n_0,k_0+K-1,m_0}\right\} \end{bmatrix} \tag{18}$$

$\underset{m_0}{\boldsymbol{H}}\left\{\underset{k_0}{\boldsymbol{H}}\left\{\underset{n_0}{\boldsymbol{H}}\left\{g_{n_0,k_0,m_0}\right\}\right\}\right\}$表示通过变化 k_0，由 $N_m \times (M-N_m+1)$ 个式(18)所示的广义 Hankel 矩阵构成的广义 Hankel 矩阵：

$$\underset{m_0}{\boldsymbol{H}}\left\{\underset{k_0}{\boldsymbol{H}}\left\{\underset{n_0}{\boldsymbol{H}}\left\{g_{n_0,k_0,m_0}\right\}\right\}\right\} \triangleq \begin{bmatrix} \underset{k_0}{\boldsymbol{H}}\left\{\underset{n_0}{\boldsymbol{H}}\left\{g_{n_0,k_0,m_0+0}\right\}\right\} & \underset{k_0}{\boldsymbol{H}}\left\{\underset{n_0}{\boldsymbol{H}}\left\{g_{n_0,k_0,m_0+1}\right\}\right\} & \cdots & \underset{k_0}{\boldsymbol{H}}\left\{\underset{n_0}{\boldsymbol{H}}\left\{g_{n_0,k_0,m_0+M-N_m}\right\}\right\} \\ \underset{k_0}{\boldsymbol{H}}\left\{\underset{n_0}{\boldsymbol{H}}\left\{g_{n_0,k_0,m_0+1}\right\}\right\} & \underset{k_0}{\boldsymbol{H}}\left\{\underset{n_0}{\boldsymbol{H}}\left\{g_{n_0,k_0,m_0+2}\right\}\right\} & & \cdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \underset{k_0}{\boldsymbol{H}}\left\{\underset{n_0}{\boldsymbol{H}}\left\{g_{n_0,k_0,m_0+N_m-1}\right\}\right\} & \cdots & \cdots & \underset{k_0}{\boldsymbol{H}}\left\{\underset{n_0}{\boldsymbol{H}}\left\{g_{n_0,k_0,m_0+M-1}\right\}\right\} \end{bmatrix} \tag{19}$$

式(17)~(19)中 N_n, N_k, N_m 分别为 $\dfrac{2N}{3}, \dfrac{2K}{3}, \dfrac{2M}{3}$ [9]。此时矩阵 $\boldsymbol{H}$ 的整体维度为：$\dfrac{8MKN}{27} \times \dfrac{(M+3)(K+3)(N+3)}{27}$。广义 Hankel 矩阵也可以分解为 $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Omega}$ 的形式，其中 $\boldsymbol{\Phi}$ 和 $\boldsymbol{\Omega}$ 称为观察矩阵和控制矩阵，$\boldsymbol{\Phi} \in \boldsymbol{C}^{\frac{8MKN}{27} \times S}$ 和 $\boldsymbol{\Omega} \in \boldsymbol{C}^{S \times \frac{(M+3)(K+3)(N+3)}{27}}$ 分别为广义列矢量和广义行矢量。

$$\boldsymbol{\Phi} = \left|\begin{array}{c} \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}_r^0\boldsymbol{A}_{\dot{r}}^0\boldsymbol{A}_u^0 \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}_r^1\boldsymbol{A}_{\dot{r}}^0\boldsymbol{A}_u^0 \\ \cdots \\ ---- \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}_r^0\boldsymbol{A}_{\dot{r}}^0\boldsymbol{A}_u^0 \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}_r^1\boldsymbol{A}_{\dot{r}}^0\boldsymbol{A}_u^0 \\ \cdots \\ ---- \\ \cdots \\ \hline \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}_r^0\boldsymbol{A}_{\dot{r}}^0\boldsymbol{A}_u^1 \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}_r^1\boldsymbol{A}_{\dot{r}}^0\boldsymbol{A}_u^1 \\ \cdots \\ ---- \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}_r^0\boldsymbol{A}_{\dot{r}}^0\boldsymbol{A}_u^1 \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}_r^1\boldsymbol{A}_{\dot{r}}^0\boldsymbol{A}_u^1 \\ \cdots \\ ---- \\ \cdots \\ \hline \cdots \end{array}\right|; \quad \boldsymbol{\Omega} = \left|\begin{array}{c} \left(\boldsymbol{A}_r^0\boldsymbol{A}_{\dot{r}}^0\boldsymbol{A}_u^0\boldsymbol{B}\right)^{\mathrm{T}} \\ \left(\boldsymbol{A}_r^1\boldsymbol{A}_{\dot{r}}^0\boldsymbol{A}_u^0\boldsymbol{B}\right)^{\mathrm{T}} \\ \cdots \\ ---- \\ \left(\boldsymbol{A}_r^0\boldsymbol{A}_{\dot{r}}^1\boldsymbol{A}_u^0\boldsymbol{B}\right)^{\mathrm{T}} \\ \left(\boldsymbol{A}_r^1\boldsymbol{A}_{\dot{r}}^1\boldsymbol{A}_u^0\boldsymbol{B}\right)^{\mathrm{T}} \\ \cdots \\ ---- \\ \cdots \\ \hline \left(\boldsymbol{A}_r^0\boldsymbol{A}_{\dot{r}}^0\boldsymbol{A}_u^1\boldsymbol{B}\right)^{\mathrm{T}} \\ \left(\boldsymbol{A}_r^1\boldsymbol{A}_{\dot{r}}^0\boldsymbol{A}_u^1\boldsymbol{B}\right)^{\mathrm{T}} \\ \cdots \\ ---- \\ \left(\boldsymbol{A}_r^0\boldsymbol{A}_{\dot{r}}^1\boldsymbol{A}_u^1\boldsymbol{B}\right)^{\mathrm{T}} \\ \left(\boldsymbol{A}_r^1\boldsymbol{A}_{\dot{r}}^1\boldsymbol{A}_u^1\boldsymbol{B}\right)^{\mathrm{T}} \\ \cdots \\ ---- \\ \cdots \\ \hline \cdots \end{array}\right| \tag{20}$$

通过分解构造出的 Hankel 矩阵得到 $\boldsymbol{\Phi},\boldsymbol{\Omega}$。相应的 $\boldsymbol{C},\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 表示为 $\tilde{\boldsymbol{C}},\tilde{\boldsymbol{A}},\tilde{\boldsymbol{B}}$。各种表示之间存在相似变换的关系[9]，相似变换用可逆矩阵 $\boldsymbol{T}$ 表示，则有

$$\begin{cases}\tilde{\boldsymbol{C}}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{A}=\boldsymbol{T}^{-1}\tilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{T}\\ \boldsymbol{T}^{-1}\tilde{\boldsymbol{B}}=\boldsymbol{B}\end{cases} \tag{21}$$

对式(16)所示的 Hankel 矩阵奇异值分解[12]：$\boldsymbol{H}\overset{\text{svd}}{=}\boldsymbol{U}\sum\boldsymbol{V}^{\mathrm{H}}$，通过 MDL(Minimum Description Length)[13], AIC(Akaike Information Criterion)[14]或奇异值比值拐点法[9]计算出散射点个数 S，即有：

$$\tilde{\boldsymbol{\Phi}}=\boldsymbol{U}_{1:S,:}\sqrt{\sum\nolimits_{1:S,1:S}}\ ,\quad \tilde{\boldsymbol{\Omega}}=\sqrt{\sum\nolimits_{1:S,1:S}}\boldsymbol{V}_{1:S,:}^{\mathrm{H}} \tag{22}$$

下面描述通过 $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}$ 矩阵计算 $\boldsymbol{A}_r,\boldsymbol{A}_{\dot{r}},\boldsymbol{A}_u$ 的过程。从前述 $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}$ 矩阵的表达式出发，将式(20)中虚线间隔的矩阵定义为 1 级矩阵，将多个 1 级矩阵构成式(20)中实线间隔矩阵定义为 2 级矩阵，多个 2 级矩阵构成 $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}$ 矩阵。类似一维参数估计中使用的方式，通过移除若干广义行的方式定义 6 个新矩阵。即：将通过移除每个 1 级矩阵的第一行和最后一行得到的矩阵分别定义为 $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_{r+},\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_{r-}$ 矩阵；将通过移除每个 2 级矩阵的第一个和最后一个 1 级矩阵得到的矩阵分别定义为 $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_{\dot{r}+},\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_{\dot{r}-}$ 矩阵；将通过移除第一个 2 级矩阵和最后一个 2 级矩阵得到的矩阵分别定义为 $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_{u+},\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_{u-}$ 矩阵，这 3 对矩阵两两之间存在如下关系：

$$\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_{r+}=\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_{r-}\tilde{\boldsymbol{A}}_r,\quad \tilde{\boldsymbol{\Phi}}_{\dot{r}+}=\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_{\dot{r}-}\tilde{\boldsymbol{A}}_{\dot{r}},\quad \tilde{\boldsymbol{\Phi}}_{u+}=\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_{u-}\tilde{\boldsymbol{A}}_u \tag{23}$$

那么

$$\tilde{\boldsymbol{A}}_r=\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_{r-}{}^{\dagger}\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_{r+},\tilde{\boldsymbol{A}}_{\dot{r}}=\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_{\dot{r}-}{}^{\dagger}\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_{\dot{r}+},\tilde{\boldsymbol{A}}_u=\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_{u-}{}^{\dagger}\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_{u+} \tag{24}$$

为实现参数自动配对，基于文献[9]中的方法，对矩阵加权矩阵 $c_r\tilde{\boldsymbol{A}}_r+c_{\dot{r}}\tilde{\boldsymbol{A}}_{\dot{r}}+c_u\tilde{\boldsymbol{A}}_u$(其中 $c_r=1/\|\tilde{\boldsymbol{A}}_r\|_{\mathrm{F}}$, $c_{\dot{r}}=1/\|\tilde{\boldsymbol{A}}_{\dot{r}}\|_{\mathrm{F}}$, $c_u=1/\|\tilde{\boldsymbol{A}}_u\|_{\mathrm{F}}$)进行特征值分解得到变换矩阵 $\boldsymbol{T}$。

$$c_r\tilde{\boldsymbol{A}}_r+c_{\dot{r}}\tilde{\boldsymbol{A}}_{\dot{r}}+c_u\tilde{\boldsymbol{A}}_u\overset{\text{eig}}{=}\boldsymbol{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}^{-1} \tag{25}$$

通过变换矩阵 $\boldsymbol{T}$ 可得：

$$\boldsymbol{A}_r=\boldsymbol{T}^{-1}\tilde{\boldsymbol{A}}_r\boldsymbol{T},\quad \boldsymbol{A}_{\dot{r}}=\boldsymbol{T}^{-1}\tilde{\boldsymbol{A}}_{\dot{r}}\boldsymbol{T},\quad \boldsymbol{A}_u=\boldsymbol{T}^{-1}\tilde{\boldsymbol{A}}_u\boldsymbol{T} \tag{26}$$

由式(15)可得到多散射点的距离、速度和角度值，为

$$\begin{bmatrix}r_1 & r_2 & \cdots\end{bmatrix}=\left[c\ln\left(\mathrm{diag}\left(\boldsymbol{A}_r\right)\right)\right]/(-\mathrm{j}4\pi\Delta f) \tag{27}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{r}_1 & \dot{r}_2 & \cdots\end{bmatrix}=\left[c\ln\left(\mathrm{diag}\left(\boldsymbol{A}_{\dot{r}}\right)\right)\right]/(-\mathrm{j}4\pi f_0T) \tag{28}$$

$$\begin{bmatrix}u_1 & u_2 & \cdots\end{bmatrix}=\left[c\ln\left(\mathrm{diag}\left(\boldsymbol{A}_u\right)\right)\right]/(-\mathrm{j}2\pi f_0d) \tag{29}$$

3　数值仿真

为验证本文所提算法的准确性和有效性，对 SS 方法做 4 个仿真实验。在各个仿真实验中，宽带阵列雷达信号载频 f_0 取典型值 1 GHz，发射宽带线性调频信号，频率离散化间隔 Δf 为 2 MHz，脉冲间隔 T 为 0.25 ms，阵元间距 d 为 0.15 m。由上述雷达参数可得不模糊距离 $r_{\mathrm{u}}=c/(2\Delta f)=75\,\mathrm{m}$，不模糊速度 $\dot{r}_{\mathrm{u}}=c/(2f_0T)=600$ m/s，不模糊角度 $u_{\mathrm{u}}=c/(f_0d)=2$。信噪比定义为 $R_{\mathrm{SN}}=10\lg A^2/\sigma^2$，其中 A 和 σ 由式(5)定义。

3.1 SS 方法与 IFFT 方法二维参数估计对比

设各散射点角度相同，不失一般性，令角度值为零。各散射点距离和速度不同。阵元数 M=8，信号带宽 B=64 MHz，频率点数 N=32，相参处理脉冲数 K=32，R_{SN}=0 dB。图 1 表示出零度方向上各散射点距离和速度的真实值与 SS 方法估计值，从图中可以看出，SS 方法可以得到各散射点准确的二维参数值。图 2 为 IFFT 结果，其二维参数像较为模糊，较难分辨出目标散射点。因此，相比于 IFFT 方法，状态空间法可以更清晰地估计出多散射点的二维参数信息。

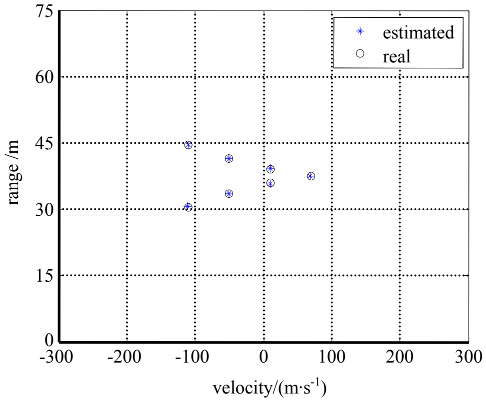

Fig.1 Real values and the SS estimated values of scatterers
图 1 各散射点的真值与 SS 估计值

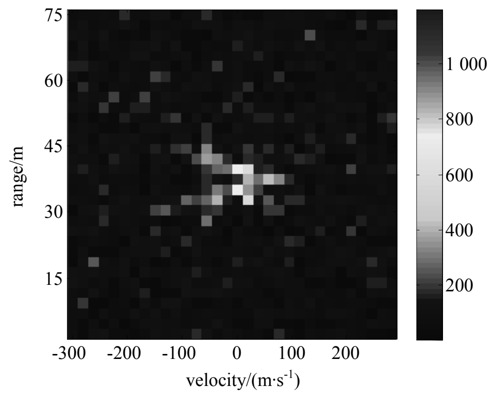

Fig.2 Results of IFFT method
图 2 IFFT 方法估计结果

3.2 SS 方法与 IFFT 方法距离估计结果对比

考虑一个由 4 个散射点构成的场景。4 个散射点速度与角度相等，4 个散射点距离 r 分别为 7.5 m,17.5 m, 37.5 m 和 52.5 m。阵元数 M=8，相参积累时间为 8 个脉冲，R_{SN}=0 dB。带宽 B 分别为 16 MHz 和 64 MHz 时 IFFT 估计结果，以及带宽 16 MHz 时 SS 估计距离结果如图 3 所示。由图可知，当带宽为 16 MHz 时，采用 IFFT 方法不能够分辨出 4 个散射点。当带宽为 64 MHz 时，才能够清晰地分辨出 4 个散射点。而采用状态空间法在带宽为 16 MHz 时就能够准确地估计出 4 个散射点。因此，状态空间法在低带宽下仍有较高的距离分辨力。

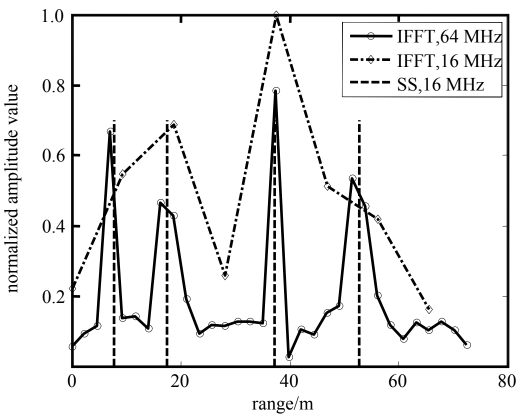

Fig.3 Estimated range of IFFT and SS
图 3 IFFT 与 SS 的距离估计值

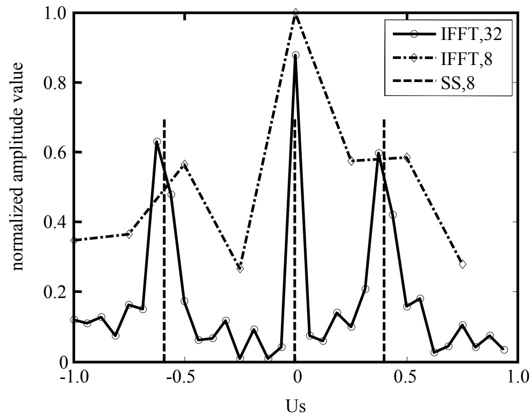

Fig.4 Estimated angle of IFFT and SS
图 4 IFFT 与 SS 的角度估计值

3.3 SS 方法与 IFFT 方法角度估计效果对比

同上一个仿真实验类似，3 个散射点距离与速度相等，角度值 u ($u=\sin\theta$)分别为−0.6,0 和 0.4。相参积累时间为 8 个脉冲，带宽 B 为 16 MHz，R_{SN} 为 0 dB。阵元数 M 分别为 8 和 32 时 IFFT 角度估计结果和阵元数为 16 时 SS 角度估计结果如图 4 所示。采用 IFFT 方法，当阵元数为 8 时，角度估计结果模糊。当阵元数为 32 时，可以准确地估计各散射点的角度值。而阵元数为 8 的情况下，状态空间法能够清晰分辨 3 个散射点。由此可知，在相同的阵元数下状态空间法有较高的角度分辨力。

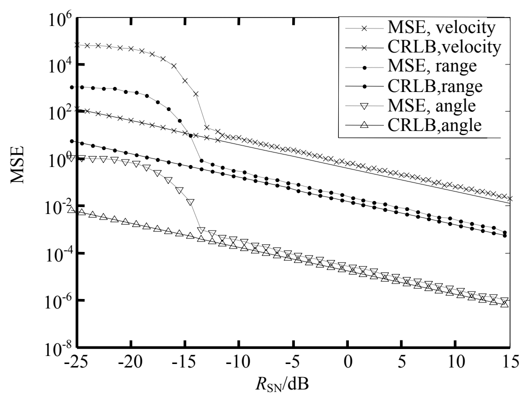

Fig.5 MSE and CRLB of velocity, range and angle
图 5 目标各参数估计值的 MSE 与 CRLB

3.4 SS 方法 MSE 与 CRLB 对比

下面进一步对比状态空间法的均方误差和 CRLB。仿真中 JIM 矩阵由前述推导得出，通过仿真软件对 JIM 矩阵求逆得到三维参数的 CRLB。其中，信号带宽 B=20 MHz，频点个数 N=10，相参积累脉冲数 K=12，阵元数 M=8。

其中待估参数的真实值 $r=10\,\mathrm{m}, \dot{r}=200\,\mathrm{m/s}, u=0.5$。每个信噪比做 1 000 次蒙特卡洛仿真实验，得到各参数 SS 方法估计的 MSE。每个信噪比的 MSE 和 CRLB 如图 5 所示。从图可知，当 SNR 大于−13 dB 时，SS 方法的 MSE 与 CRLB 非常接近，说明状态空间法具有良好的统计特性。

4　结论

本文提出了一种基于状态空间的宽带阵列雷达目标的距离、速度和角度值三维联合估计方法。详细介绍了基于线性系统状态空间模型的广义 Hankel 矩阵构建步骤以及基于奇异值分解的参数提取算法。数值仿真表明，相比较于传统的 IFFT 方法，基于 SS 的参数估计具备更好的目标估计和分辨性能。与此同时，通过比较 SS 方法的 MSE 和 CRLB，也可进一步说明 SS 方法具有良好的统计特性。

参考文献:

[1] LI Y,ZHANG J,QU S,et al. Wideband radar cross section reduction using two-dimensional phase gradient metasurfaces[J]. Applied Physics Letters, 2014,104(22):221110-1–221110-5.

[2] 甘建超,邹菊红. 宽带数字信号处理及其在电子战中的应用[J]. 太赫兹科学与电子信息学报, 2010,8(4):425–430. (GAN Jianchao,ZOU Juhong. Wide-band digital signal processing with application in electronic warfare[J]. Journal of Terahertz Science and Electronic Information Technology, 2010,8(4):425–430.)

[3] JIANG J,HUANG Y,SUN B,et al. Wideband radar signal detection based on random demodulator[J].Chinese Journal of Scientific Instrument, 2014,35(3):709–713.

[4] 刘平,靳成英,陈曾平. 一种基于短时 FFT 的宽带数字侦察接收机设计[J]. 信号处理, 2008,24(6):988–991. (LIU P, JIN Chengying,CHEN Zengping. A short-time FFT based design for wideband digital reconnaissance receiver[J]. Signal Processing, 2008,24(6):988–991.)

[5] VALAEE S,KABAL P. Wideband array processing using a two-sided correlation transformation[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1995, 43(1):160–172.

[6] HUNG H,KAVEH M. Focusing matrices for coherent signal-subspace processing[J]. IEEE Transactions on Acoustics Speech & Signal Processing, 1988,36(8):1272–1281.

[7] KUNG S Y,ARUN K S,RAO D V. State-space and singular-value decomposition-based approximation methods for the harmonic retrieval problem[J]. Journal of the Optical Society of America, 1983,73(12):1799–1811.

[8] RAO B D,ARUN K S. Model based processing of signals:a state space approach[J]. Proceedings of the IEEE, 1992,80(2):283–309.

[9] DAVID J H. State-space approaches to ultra-wideband Doppler processing[D]. Worcester,Massachusetts,America:Worcester Polytechnic Institute, 2007.

[10] WANG J,WEI S M,SUN J P,et al. A GTD model and state space approach based method for extracting the UWB scattering center of moving target[J]. Science China, 2011,54(1):182–196.

[11] 杨利民,苏卫民,顾红,等. 状态空间法在超宽带雷达动目标速度及距离像估计中的应用[J]. 电子与信息学报, 2012, 34(5):1051–1056. (YANG Limin,SU Weimin,GU Hong,et al. Application of state-space method to velocity and range profile estimation of moving target for ultra-wide band radar[J]. Journal of Electronics and Information Technology, 2012,34(5): 1051–1056.)

[12] FOSTER J A,MCWHIRTER J G,DAVIES M R,et al. An algorithm for calculating the QR and singular value decompositions of polynomial matrices[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2010,58(3):1263–1274.

[13] SCHWARZ G. Estimating the dimension of a model[J]. Annals of Statistics, 1978,6(2):461–464.

[14] AKAIKE H. A new look at the statistical model identification[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1974,19(6): 716–723.

作者简介:

刘　巍(1991–)，男，山西省大同市人，在读硕士研究生，主要研究方向为雷达信号处理. email:704204679@qq.com.

汤　俊(1973–)，男，南京市人，教授，博士生导师，主要研究方向为 MIMO 雷达、信息论、阵列信号处理等.

张　宁(1987–)，男，江苏省徐州市人，博士，主要研究方向为 MIMO 雷达信号处理等.