文章编号： 2095-4980(2017)04-0601-06

多输入多输出雷达低旁瓣发射方向图优化算法

李玉翔 [1]，郑娜娥 [1]，王　浩 [2]，胡捍英 [1]

(1.信息工程大学　导航与空天目标工程学院，河南　郑州　450002；2.61081 部队，北京　100080)

摘　要： 提出了一种基于波束域加权的低旁瓣方向图设计方法。综合考虑方向图匹配性能和发射阵元等功率作为约束条件，建立低旁瓣发射方向图优化模型，采用半正定松弛技术将优化模型转化为凸优化问题；对波束加权矩阵施加对偶约束，使得接收信号满足旋转不变性；利用高斯随机化方法对波束加权矩阵进行求解，得到原优化问题的最优解。仿真结果表明，算法能够保持期望主瓣形状并有效降低方向图旁瓣，提高到达角(DOA)的估计精确度和角度分辨力。

关键词： 多输入多输出(MIMO)雷达；发射方向图；波束域加权；旁瓣抑制

中图分类号： TN958/959.74　　**文献标志码：** A　　**doi：** 10.11805/TKYDA201704.0601

Low sidelobe transmit beam pattern optimization algorithm for Multiple-Input Multiple-Output radar

LI Yuxiang[1]，ZHENG Na'e[1]，WANG Hao[2]，HU Hanying[1]

(1.Institute of Navigation and Space Target Engineering，Information Engineering University，Zhengzhou Henan 450002，China；2.Unit of 61081 of PLA，Beijing 100080，China)

Abstract： A low sidelobe transmit beam pattern optimization algorithm based on beam space weighting is proposed. Firstly, the optimization model is established by concerning the beam pattern matching performance while keeping elemental power distribution to be uniform. For the proposed optimization model is nonconvex, semidefinite programming relaxation technique is adopted to transform the nonconvex problem to a convex one. Then, symmetry constraint is constructed for beamspace weighting matrices, which guarantees the rotational invariance property of the received signal. Gaussian randomization technique is utilized to solve the beamspace weighting matrices, therefore, the optimum of original problem can be obtained. Simulation results show that the proposed algorithm can maintain the desired mainlobe shape of the beam pattern as well as decrease the sidelobes, leading to the improvement of Direction Of Arrival(DOA) estimation and target resolution performances.

Keywords： Multiple-Input Multiple-Output radar；transmit beam pattern；beamspace weighting；sidelobe depression

多输入多输出(MIMO)雷达[1]是近年来提出的一种新体制有源探测技术。根据阵元配置的不同，MIMO 雷达可以归类为分布式 MIMO 雷达[2–4]和集中式 MIMO 雷达[5–7]。分布式 MIMO 雷达的收发天线间距较大，各个天线对目标有不同的观测角度，能克服目标的闪烁现象，从而可以提高系统的探测性能。集中式 MIMO 雷达收发阵元间距较小，可以通过灵活地设计发射信号，发挥波形分集的优势。相对于相控阵雷达，集中式 MIMO 雷达有更高的角度估计精确度。本文针对集中式 MIMO 雷达的波形设计问题展开研究。

集中式 MIMO 雷达采用的发射信号波形可分为正交信号和部分相关波形。当 MIMO 雷达采用正交波形[5]时，发射功率在空间中均匀分布，有利于在雷达探测初始阶段进行全空域搜索。但全向辐射会导致接收信噪比的损失，降低雷达的探测距离。部分相关波形则可以将辐射能量集中在空间感兴趣的空域，并获得一定的相干增益，提高雷达接收端的信号处理性能。传统的发射方向图波形设计方法一般包括 2 个步骤：首先利用期望发射方向图设计出协方差矩阵[8–9]，协方差矩阵的合成一般建模为半正定约束优化问题；然后在满足一些实际约束

收稿日期： 2016-11-04；**修回日期：** 2016-12-19
基金项目： 国家自然科学基金资助项目(41301481)

限制(如恒模或者低峰均比)条件下得到实际发射信号，使其协方差矩阵等于或者接近已知的协方差矩阵[10–11]。

文献[12]从波束域加权的视角出发，提出了新的方向图优化模型，仅需要一步求解就能直接获得实际发射波形，缩减了运算步骤。但该方法不能保证每个阵元的发射功率相等，降低了雷达发射机的效能。在此基础上，文献[13]利用多维球(Hyper Sphere)坐标映射方法将基于波束域加权的方向图设计转化为非约束优化，并利用拟牛顿法对波束加权矩阵进行求解。文献[14]联合考虑方向图匹配性能和接收信号的旋转不变性(Rotational Invariance Property，RIP)，同时增加每个阵元发射功率相等的约束，建立了波束加权矩阵的优化模型，获得较好的到达角(DOA)估计性能。然而该方法并没有对方向图的旁瓣进行限制。在发射方向图设计中，抑制旁瓣可以减少来自旁瓣区杂波或虚假目标的能量，提高目标的参数估计性能。

针对这一问题，本文提出了一种基于波束域加权的低旁瓣方向图设计算法。

1 信号模型

考虑发射阵元为 M，接收阵元为 N 的 MIMO 雷达，阵元间距分别为 d_t 和 d_r，发射阵列和接收阵列距离较近。假设目标位于远场，目标到达阵列的距离远大于阵列孔径，收发阵列对目标的观测角相同。采用正交波形的 MIMO 雷达发射能量均匀分布在整个空间，然而感兴趣的目标通常集中在较小的空域，全向发射会造成能量浪费。为了将发射能量集中在感兴趣空域 Θ，减少在不感兴趣空域 $\overline{\Theta}$ 的辐射能量，这里引入波束加权矩阵 $\boldsymbol{W}$，使发射信号为正交波束基 $\boldsymbol{\varphi}(t)=[\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_K(t)]^{\mathrm{T}}$ 的线性组合 $(K\leqslant M)$，$(\bullet)^{\mathrm{T}}$ 表示转置，即发射信号的表达式为 $\boldsymbol{s}(t)=[s_1(t),s_2(t),\cdots,s_M(t)]^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{W}^*\boldsymbol{\varphi}(t)$。$\boldsymbol{W}=[\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\cdots,\boldsymbol{w}_K]$ 为 $M\times K$ 维的波束加权矩阵，$\boldsymbol{w}_k\in C^{M\times1}$ 表示第 k 个正交波束的加权矢量。正交波形满足 $\int_0^T\varphi_i(t)\varphi_j^*(t)=\delta(i-j)$，$i,j=1,2,\cdots,K$，$T$ 为脉冲周期，$(\bullet)^*$ 表示共轭运算。空间 θ 方向接收到的辐射信号为：

$$\boldsymbol{x}(t,\theta)=\sum_{k=1}^{K}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}(\theta)\boldsymbol{w}_k^*\varphi_k(t)=\left(\boldsymbol{W}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{a}(\theta)\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varphi}(t) \tag{1}$$

式中 $\boldsymbol{a}(\theta)$ 为 $M\times1$ 维的发射导向矢量。假设空间中存在 P 个目标，考虑目标满足 Sweiling II 起伏模型，即在一个发射脉冲周期内目标的雷达散射截面积(Radar Cross-Section，RCS)恒定，脉冲与脉冲之间的起伏相互统计独立。经过目标反射后，t 时刻到达接收阵列的第 τ 个回波脉冲为：

$$\boldsymbol{r}(t,\tau)=\sum_{p=1}^{P}\beta_p(\tau)\left(\boldsymbol{W}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{a}(\theta_p)\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varphi}(t)\boldsymbol{b}(\theta_p)+\boldsymbol{n}(t,\tau) \tag{2}$$

式中：$\beta_p(\tau)$ 为目标回波的复振幅；方差为 σ_β^2；$\boldsymbol{b}(\theta_p)$ 为第 p 个目标接收导向矢量；$\boldsymbol{n}(t,\tau)$ 是 $N\times1$ 维的加性复高斯噪声。在接收端进行波形分离，$\boldsymbol{r}(t,\tau)$ 与 K 个正交波形 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 匹配滤波后的总输出矩阵按列堆积成维数为列可得

$$\boldsymbol{y}(\tau)=\sum_{p=1}^{P}\beta_p(\tau)\left(\boldsymbol{W}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{a}(\theta_p)\right)\otimes\boldsymbol{b}(\theta_p)+\tilde{\boldsymbol{n}}(\tau) \tag{3}$$

式中：$\otimes$ 表示 Kronecker 积，$\tilde{\boldsymbol{n}}(\tau)=[\boldsymbol{n}_1^{\mathrm{T}}(\tau),\boldsymbol{n}_2^{\mathrm{T}}(\tau),\cdots,\boldsymbol{n}_K^{\mathrm{T}}(\tau)]^{\mathrm{T}}$ 为 $KN\times1$ 噪声矢量，噪声矢量服从方差为 σ_n^2 的复高斯过程，即 $\tilde{\boldsymbol{n}}(\tau)\sim N(0,\sigma_n^2\boldsymbol{I}_{KN})$，$\boldsymbol{I}_{KN}$ 为 KN 维的单位阵。

2 本文优化算法

根据式(1)，在空间 θ 方向的信号辐射能量为：

$$P(\theta)=\boldsymbol{a}^{\mathrm{H}}(\theta)E\left\{\boldsymbol{s}(t)\boldsymbol{s}^{\mathrm{H}}(t)\right\}\boldsymbol{a}(\theta)=\left\|\boldsymbol{W}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{a}(\theta)\right\|^2=\sum_{k=1}^{K}\boldsymbol{w}_k^{\mathrm{H}}\boldsymbol{a}(\theta)\boldsymbol{a}^{\mathrm{H}}(\theta)\boldsymbol{w}_k \tag{4}$$

$P(\theta)$ 就是 MIMO 雷达的发射方向图增益。可以看出，相对于传统的 MIMO 雷达的全向发射，通过设计合适的波束加权矩阵 $\boldsymbol{W}$，可以增大感兴趣空域内的发射能量，减小不感兴趣空域的能量，提高辐射能量的利用率。MIMO 雷达发射方向图合成问题旨在逼近期望波束，在数学上写成 p 范数的形式，可得

$$\left\{\sum_{l=1}^{L}\left|\sum_{k=1}^{K}\boldsymbol{w}_k^{\mathrm{H}}\boldsymbol{a}(\theta)\boldsymbol{a}^{\mathrm{H}}(\theta)\boldsymbol{w}_k-\alpha P_d\left(\theta_l\right)\right|^p\right\} \tag{5}$$

式中：α 为优化因子用于尺度匹配；$p=1,2$ 或者 ∞，分别对应 l_1,l_2 以及 l_∞ 范数。不失一般性，本文采用范数来刻画发射波束与期望波束的相近程度。

为使得 MIMO 雷达发射机工作在饱和状态，以便发挥其最大效能，通常要求雷达发射波形具有满足 M 个阵元发射功率相等的约束：

$$\sum_{k=1}^{K}\left|\boldsymbol{w}_k(j)\right|^2=\frac{P_{\mathrm{t}}}{M},\quad j=1,2,\cdots,M \tag{6}$$

式中 P_{t} 为雷达发射总功率。

2.1 低旁瓣发射方向图优化模型

在发射方向图波形设计中，抑制旁瓣可将主要能量集中在主瓣区域。将整个空域划分为主瓣区域 Θ 和旁瓣区域 $\overline{\Theta}$，$\theta_l\in\Theta$ $(l=1,2,\cdots,L)$ 表示主瓣区域内的离散化角度，$\theta_s\in\overline{\Theta}$ $(s=1,2,\cdots,S)$ 表示旁瓣区域内的离散化角度。本文的低旁瓣发射方向图优化准则为：保持 M 个阵元的发射功率相等，在方向图旁瓣低于一定阈值 η 的条件下，使得设计方向图主瓣逼近期望方向图主瓣，即使两者之差最小。设计准则具体可表示为：

$$\begin{cases}\min\limits_{\alpha,\boldsymbol{W}}\boldsymbol{J}=\sum\limits_{l=1}^{L}\left|\sum\limits_{k=1}^{K}\boldsymbol{w}_k^{\mathrm{H}}\boldsymbol{a}(\theta_l)\boldsymbol{a}^{\mathrm{H}}(\theta_l)\boldsymbol{w}_k-\alpha P_{\mathrm{d}}(\theta_l)\right|^2\\ \text{s.t.}\ \left|\sum\limits_{k=1}^{K}\boldsymbol{w}_k^{\mathrm{H}}\boldsymbol{a}(\theta_s)\boldsymbol{a}^{\mathrm{H}}(\theta_s)\boldsymbol{w}_k\right|\leqslant\eta,\ \theta_s\in\overline{\Theta},\ s=1,2,\cdots,S\\ \sum\limits_{k=1}^{K}\left|\boldsymbol{w}_k(j)\right|^2=\dfrac{P_{\mathrm{t}}}{M},\ j=1,2,\cdots,M\end{cases} \tag{7}$$

该优化问题属于非凸二次约束二次规划(Quadratically Constrained Quadratic Programming，QCQP)问题，不易获得全局最优解[15−16]。本文考虑将其进行转化，这里引入一组辅助变量 $\boldsymbol{X}_k=\boldsymbol{w}_k\boldsymbol{w}_k^{\mathrm{H}}$ $(k=1,2,\cdots,K)$。根据矩阵迹的性质，有 $\boldsymbol{w}_k^{\mathrm{H}}\boldsymbol{a}(\theta_l)\boldsymbol{a}^{\mathrm{H}}(\theta_l)\boldsymbol{w}_k=\mathrm{tr}\left\{\boldsymbol{a}(\theta_l)\boldsymbol{a}^{\mathrm{H}}(\theta_l)\boldsymbol{w}_k\boldsymbol{w}_k^{\mathrm{H}}\right\}$，则式(7)可以转化为：

$$\begin{cases}\min\limits_{\alpha,\boldsymbol{X}_k}\sum\limits_{l=1}^{L}\left|\sum\limits_{k=1}^{K}\mathrm{tr}\left\{\boldsymbol{a}(\theta_l)\boldsymbol{a}^{\mathrm{H}}(\theta_l)\boldsymbol{X}_k\right\}-\alpha P_{\mathrm{d}}(\theta_l)\right|^2\\ \text{s.t.}\ \left|\sum\limits_{k=1}^{K}\mathrm{tr}\left\{\boldsymbol{a}(\theta_s)\boldsymbol{a}^{\mathrm{H}}(\theta_s)\boldsymbol{X}_k\right\}\right|\leqslant\eta,\ \theta_s\in\overline{\Theta},\ s=1,2,\cdots,S\\ \sum\limits_{k=1}^{K}\mathrm{diag}\{\boldsymbol{X}_k\}=\dfrac{P_{\mathrm{t}}}{M}\boldsymbol{I}_{M\times1}\\ \mathrm{rank}(\boldsymbol{X}_k)=1,\ k=1,2,\cdots,K\end{cases} \tag{8}$$

式中 $\mathrm{diag}(\bullet)$ 表示矩阵的对角化矢量。由于秩 1 约束条件 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{X}_k)=1$ 是非凸的，半正定松弛并配合高斯随机化是求解上式含秩 1 约束优化问题的有效手段，因此本文采用半正定松弛技术对其进行求解。松弛掉式(8)中的含秩 1 约束条件(稍后会在随机化过程中重建该约束)，可得

$$\begin{cases}\min\limits_{\alpha,\boldsymbol{X}_k}\sum\limits_{l=1}^{L}\left|\sum\limits_{k=1}^{K}\mathrm{tr}\left\{\boldsymbol{a}(\theta_l)\boldsymbol{a}^{\mathrm{H}}(\theta_l)\boldsymbol{X}_k\right\}-\alpha P_{\mathrm{d}}(\theta_l)\right|^2\\ \text{s.t.}\ \left|\sum\limits_{k=1}^{K}\mathrm{tr}\left\{\boldsymbol{a}(\theta_s)\boldsymbol{a}^{\mathrm{H}}(\theta_s)\boldsymbol{X}_k\right\}\right|\leqslant\eta,\ \theta_s\in\overline{\Theta},\ s=1,2,\cdots,S\\ \sum\limits_{k=1}^{K}\mathrm{diag}\{\boldsymbol{X}_k\}=\dfrac{P_{\mathrm{t}}}{M}\boldsymbol{I}_{M\times1};\quad \boldsymbol{X}_k\geqslant0,\ k=1,2,\cdots,K\end{cases} \tag{9}$$

转化为凸优化问题后，通过引入一组新的辅助变量 $\{\delta_l\}_{l=1}^{L}$，则式(9)可以转化为：

$$\begin{cases}\min\limits_{\alpha,\boldsymbol{X}_k}\ \sum\limits_{l=1}^{L}\delta_l\\ \text{s.t.}\ \left|\sum\limits_{k=1}^{K}\mathrm{tr}\left\{\boldsymbol{a}(\theta_l)\boldsymbol{a}^{\mathrm{H}}(\theta_l)\boldsymbol{X}_k\right\}-\alpha P_{\mathrm{d}}(\theta_l)\right|^2\leqslant\delta_l,\ \theta_l\in\Theta,\ l=1,2,\cdots,L\\ \left|\sum\limits_{k=1}^{K}\mathrm{tr}\left\{\boldsymbol{a}(\theta_s)\boldsymbol{a}^{\mathrm{H}}(\theta_s)\boldsymbol{X}_k\right\}\right|\leqslant\eta,\ \theta_s\in\overline{\Theta},\ s=1,2,\cdots,S\\ \sum\limits_{k=1}^{K}\mathrm{diag}\{\boldsymbol{X}_k\}=\dfrac{P_{\mathrm{t}}}{M}\boldsymbol{I}_{M\times1};\quad \boldsymbol{X}_k\geqslant0,\ k=1,2,\cdots,K\end{cases} \tag{10}$$

上式中的二次不等式约束可以转化为：

$$\left|\sum_{k=1}^{K}\mathrm{tr}\left\{\boldsymbol{a}(\theta_l)\boldsymbol{a}^{\mathrm{H}}(\theta_l)\boldsymbol{X}_k\right\}-\alpha P_{\mathrm{d}}(\theta_l)\right|^2\leqslant\delta_l\Leftrightarrow\left|\sum_{k=1}^{K}2\cdot\mathrm{tr}\left\{\boldsymbol{a}(\theta_l)\boldsymbol{a}^{\mathrm{H}}(\theta_l)\boldsymbol{X}_k\right\}-2\alpha P_{\mathrm{d}}(\theta_l)\right|^2+\sigma_l^2-2\sigma_l+1\leqslant\sigma_l^2+2\sigma_l+1 \tag{11}$$

利用式(11)，则可以将式(10)中的二次约束写成二阶锥形式：

$$\left\|\begin{matrix}\sum_{k=1}^{K}2\cdot\mathrm{tr}\left\{\boldsymbol{a}(\theta_l)\boldsymbol{a}^{\mathrm{H}}(\theta_l)\boldsymbol{X}_k\right\}-2\alpha P_{\mathrm{d}}(\theta_l)\\ \sigma_l-1\end{matrix}\right\|^2\leqslant(\sigma_l+1)^2\Leftrightarrow\left\|\begin{matrix}\sum_{k=1}^{K}2\cdot\mathrm{tr}\left\{\boldsymbol{a}(\theta_l)\boldsymbol{a}^{\mathrm{H}}(\theta_l)\boldsymbol{X}_k\right\}-2\alpha P_{\mathrm{d}}(\theta_l)\\ \sigma_l-1\end{matrix}\right\|\leqslant(\sigma_l+1) \tag{12}$$

式中 $\|\cdot\|$ 表示矩阵的 Frobenius 范数。式(7)的优化问题可以最终表示为二阶锥优化问题(Second Order Cone Programming，SOCP)：

$$\begin{cases}\min\limits_{\alpha,\boldsymbol{X}_k}\ \sum_{l=1}^{L}\delta_l\\ \text{s.t.}\ \left\|\begin{matrix}\sum_{k=1}^{K}2\cdot\mathrm{tr}\left\{\boldsymbol{a}(\theta_l)\boldsymbol{a}^{\mathrm{H}}(\theta_l)\boldsymbol{X}_k\right\}-2\alpha P_{\mathrm{d}}(\theta_l)\\ \sigma_l-1\end{matrix}\right\|\leqslant(\sigma_l+1),\ \theta_l\in\Theta,\ l=1,2,\cdots,L\\ \left|\sum_{k=1}^{K}\mathrm{tr}\left\{\boldsymbol{a}(\theta_s)\boldsymbol{a}^{\mathrm{H}}(\theta_s)\boldsymbol{X}_k\right\}\right|\leqslant\eta,\ \theta_s\in\overline{\Theta},\ s=1,2,\cdots,S\\ \sum_{k=1}^{K}\mathrm{diag}\{\boldsymbol{X}_k\}=\frac{P_{\mathrm{t}}}{M}\boldsymbol{1}_{M\times1};\quad \boldsymbol{X}_k\geqslant0,\ k=1,2,\cdots,K\end{cases} \tag{13}$$

转化为 SOCP 问题后，就可以利用 Matlab 凸优化工具箱件 CVX[17]求出其最优解。

2.2 波束加权矩阵 $\boldsymbol{W}$ 的对偶分析

为了使接收阵列不受均匀线阵的约束，同时使接收信号满足旋转不变性，当正交波束基的数目 K 为偶数时，波束加权矩阵 $\boldsymbol{W}$ 应满足如下条件：

$$\left|\boldsymbol{a}(\theta)^{\mathrm{H}}\boldsymbol{w}_k\right|=\left|\boldsymbol{a}(\theta)^{\mathrm{H}}\boldsymbol{w}_{K/2+k}\right|,\ \theta\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}],\ k=1,2,\cdots,K/2 \tag{14}$$

这里借鉴文献[14]的思路，令波束加权矩阵的列矢量满足对偶特性，即满足：

$$\boldsymbol{W}=\left[\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\cdots,\boldsymbol{w}_{K/2},\tilde{\boldsymbol{w}}_1^*,\tilde{\boldsymbol{w}}_2^*,\cdots,\tilde{\boldsymbol{w}}_{K/2}^*\right] \tag{15}$$

式中 $\tilde{\boldsymbol{w}}_k(i)=\boldsymbol{w}_k(M-i+1)$，$i=1,2,\cdots,M$。这里以 $K=2$ 为例，来说明 $\boldsymbol{W}$ 对偶能满足式(14)中的旋转不变性条件，此时 $\boldsymbol{W}=\left[\boldsymbol{w},\tilde{\boldsymbol{w}}^*\right]$，可得

$$\boldsymbol{a}(\theta)^{\mathrm{H}}\boldsymbol{w}=\sum_{k=1}^{M}w_k\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\sin\theta(k-1)} \tag{16}$$

$$\boldsymbol{a}(\theta)^{\mathrm{H}}\tilde{\boldsymbol{w}}^*=\sum_{k=1}^{M}w_k^*\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\sin\theta(M-k)} \tag{17}$$

将式(14)进行形式变换，则有

$$\boldsymbol{a}(\theta)^{\mathrm{H}}\tilde{\boldsymbol{w}}^*=\left(\sum_{k=1}^{M}w_k\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\sin\theta(k-1)}\right)^*\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\sin\theta(M-k)}=\left(\boldsymbol{a}(\theta)^{\mathrm{H}}\boldsymbol{w}\right)^*\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\sin\theta(M-1)} \tag{18}$$

从式(18)中可以看出 $\boldsymbol{a}(\theta)^{\mathrm{H}}\boldsymbol{w}$ 与 $\boldsymbol{a}(\theta)^{\mathrm{H}}\tilde{\boldsymbol{w}}^*$ 的幅度相同，只存在相差项 $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\sin\theta(M-1)}$，因此满足式(14)的条件，即接收信号满足旋转不变性。当 K 为偶数时，以此类推。由此可知，求解波束加权矩阵 $\boldsymbol{W}$ 只需求解 $\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\cdots,\boldsymbol{w}_{K/2}$ 即可。

综上所述，当得到式(13)的全局最优解后，结合波束加权矩阵的对偶特性，在高斯随机化方法中重建秩 1 的约束条件，即可获得低旁瓣发射方向图优化波形，具体算法步骤如下：

步骤 1，设定高斯随机化次数 N_g 以及最优解 $\boldsymbol{X}_k^{\mathrm{opt}}$，$k=1,2,\cdots,K/2$；

步骤 2，若 $\boldsymbol{X}_{\mathrm{opt}}$ 的秩等于 1，则对 $\boldsymbol{w}_k$ 取 $\boldsymbol{X}_k^{\mathrm{opt}}$ 的主特征向量；若 $\boldsymbol{X}_k^{\mathrm{opt}}$ 的秩大于 1，则对 $\boldsymbol{X}_k^{\mathrm{opt}}$ 进行特征值分解，得到 $\boldsymbol{X}_k^{\mathrm{opt}}=\boldsymbol{U}_k\boldsymbol{\Sigma}_k\boldsymbol{U}_k^{\mathrm{H}}$。然后取复单位圆上的随机向量 v_k^l $(l=1,2,\cdots,N_g)$，使得 $\boldsymbol{w}_k^l=\boldsymbol{U}_k\boldsymbol{\Sigma}_k^{1/2}\boldsymbol{v}_k^l$；

步骤 3，若 $\boldsymbol{w}_k^l$ 不满足条件 $\sum_{k=1}^{K}\mathrm{diag}\{\boldsymbol{w}_k^l(\boldsymbol{w}_k^l)^{\mathrm{H}}\}=\frac{P_{\mathrm{t}}}{M}\boldsymbol{1}_{M\times1}$，则对 $\boldsymbol{w}_k^l$ 进行尺度变换得到 $\boldsymbol{w}_{k,\mathrm{new}}^l$，使其满足该条件；

步骤 4，计算式(7)中目标函数 $\boldsymbol{J}$ ，从 N_g 次高斯随机化过程中取使得目标函数最小的 $\boldsymbol{w}_{k,\text{new}}^{l}$ 作为波束加权矩阵的列矢量 $\boldsymbol{w}_{\text{opt}}=\boldsymbol{w}_{k,\text{new}}^{l}$ ，以该方式分别获得 $\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\cdots,\boldsymbol{w}_{K/2}$ ；

步骤 5，根据 $\boldsymbol{W}$ 对偶特性得到波束加权矩阵 $\boldsymbol{W}$ ，再利用 $\boldsymbol{s}(t)=\boldsymbol{W}^{*}\boldsymbol{\varphi}(t)$ 得到 MIMO 雷达实际发射信号 $\boldsymbol{s}(t)$ 。

3 实验仿真

考虑单基地 MIMO 雷达发射阵列为均匀线阵，阵元数 $M=10$ ，阵元间距为 $\lambda/2$ ，接收阵元数 $N=10$ ，接收阵列为非均匀线阵，阵元位置随机分布在 $[0,9]\lambda/2$ 的范围内。发射总功率 $P_t=M$ ，正交波束基个数 $K=2$ 。正交波形采用的形式为 $\varphi_k(t)=\sqrt{1/T}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi mt/T}$ ， $(m=1,2,\cdots,M;k=1,2)$ ，码长 T 取 1024，旁瓣阈值取经验值 $\eta_s=10^{-2}$ 。选择传统正交波形和文献[14]发射波形域方法(Transmit Beam space Method，TBM)设计的波形作为对比算法。

假设感兴趣的空域为 $\Theta=[-10°,10°]$ ，不感兴趣的方向为 $\overline{\Theta}=[-90°,-20°]\cup[20°,90°]$ 。 Θ 和 $\overline{\Theta}$ 内的角度采样点数分别为 $L=100$, $S=400$ 。图 1 给出了传统正交波形、TBM 以及本文算法的发射方向图设计结果。从图 1 中可以看出，正交波形所形成方向图在空间中全向分布。TBM 形成的方向图能够将能量聚集在 $[-10°,10°]$ 的区域内，但方向图旁瓣高。相比于 TBM，所提算法的旁瓣值得到了较好的抑制，比 TBM 的旁瓣值约低 7 dB。

为了验证所提算法的 DOA 估计性能，假设感兴趣空域内存在两个目标，方位分别为 $\theta_1=-5°$ 和 $\theta_2=5°$ 。假设噪声为均值为 0，方差 $\sigma_n^2=1$ 的复高斯白噪声。

目标散射系数服从零均值，方差为 σ_β^2 的复高斯分布。接收信噪比 $R_{\text{SN}}=\sigma_\beta^2/\sigma_n^2$ 区间取 $[-30,30]$dB ，间隔为 3dB ，快拍数取 50，采用 ESPRIT 算法进行 DOA 估计，并进行 500 次蒙特卡洛试验。图 2 给出了传统正交波形、TBM 以及本文算法 DOA 估计的克拉美罗界(Cramer Rao Bound，CRB)与均方根误差。均方根误差(Root-Mean-Square Error，RMSE)的定义为 $\text{RMSE}=\sqrt{\dfrac{1}{2Q}\sum_{p=1}^{Q}[(\theta_1-\hat{\theta}_{1,q})^2+(\theta_2-\hat{\theta}_{2,q})^2]}$ ， $Q=500$ ， $\hat{\theta}_{l,q}$ 为到达角 $\theta_l(l=1,2)$ 在第 q 次蒙特卡洛试验中的估计值。从图中可以看出，正交波形的角度估计性能最差，是因为正交波形有能量浪费在感兴趣的区域之外，接收信噪比较低，影响了参数估计性能。TBM 的 DOA 估计性能优于正交波形，相比于 TBM，由于能将发射旁瓣能量进行有效抑制，所以本文优化波形的 DOA 估计性能得到提升。

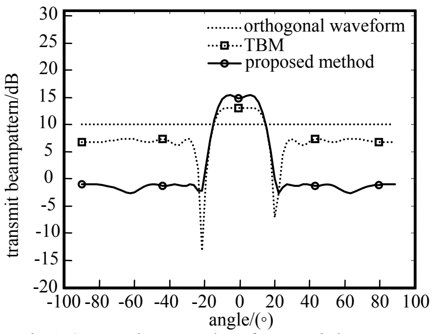

Fig.1 Comparison results of transmit beampattern

图 1 发射方向图对比结果

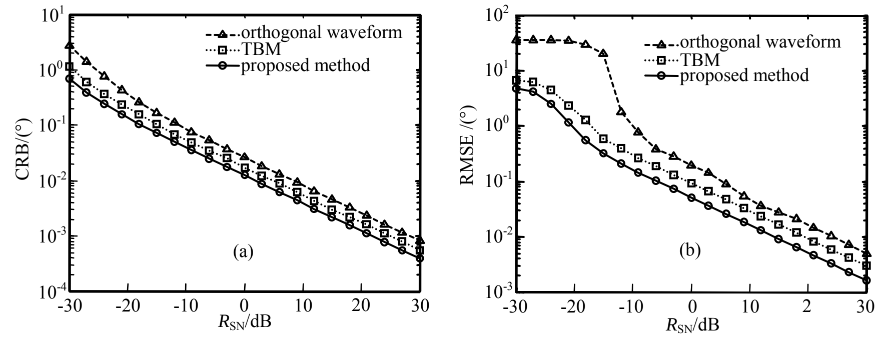

Fig.2 CRB versus SNR curves (a) and RMSE versus SNR curves (b)

图 2 CRB 随 SNR 变化曲线(a)和 RMSE 随 SNR 变化曲线(b)

为验证本文方法区分角度相近目标的性能，假设目标方位位于较近位置， $\theta_1=7°,\theta_2=8°$ ，来对比 DOA 分辨临近目标的成功概率。当目标角度的估计值 $\hat{\theta}_l$ 和真实值 θ_l 满足条件 $|\hat{\theta}_l-\theta_l|\leqslant\Delta\theta/2,\ (l=1,2;\Delta\theta=|\theta_2-\theta_1|)$ 时，判定为目标分辨成功。图 3 给出了正交波形、TBM 以及本文算法的目标分辨成功概率。可以看出，正交波形的角度分辨成功概率最低，所提算法的成功概率高于 TBM。仿真结果表明在角度估计算法相同的情况下，本文优化波形的角度分辨精确度更高。

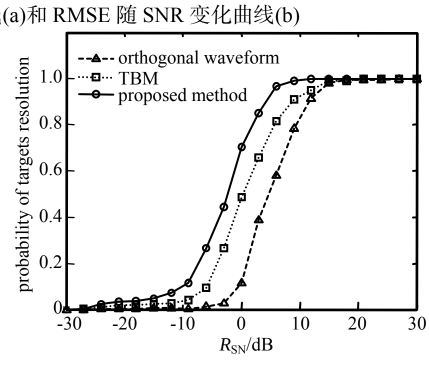

Fig.3 Probability of target resolution versus SNR curves

图 3 成功概率随 SNR 变化曲线

4 结论

为降低 MIMO 雷达发射方向图的旁瓣能量，改善接收端的 DOA 估计性能，本文提出了一种基于波束域加权的低旁瓣方向图设计方法。实验结果表明，所提算法的旁瓣值得到了较

好的抑制，比 TBM 算法的旁瓣值低约 7 dB。在接收端进行 DOA 估计时，所提算法获得了更好的角度分辨率和目标分辨概率。值得指出的是，在构造波束加权矩阵时，采用了对偶的方法来满足接收信号的旋转不变性，所以需要发射波束为偶数。构建满足旋转不变性且不受波束为偶数限制的波束加权矩阵有待进一步研究。

参考文献：

[1] LI J,STOICA P. MIMO Radar Signal Processing[M]. Hoboken:Wiley, 2009.

[2] HAIMOVICH A M,BLUM R S,CIMINI L J. MIMO radar with widely separated antennas[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2008,25(1):116-129.

[3] 胡捍英,孙扬,郑娜娥. 多目标速度估计的分布式 MIMO 雷达资源分配算法[J]. 电子与信息学报, 2016,38(10):2453-2460. (HU Hanying,SUN Yang,ZHENG Na'e. Resource allocation approach in distributed MIMO radar with multiple targets for velocity estimation[J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2016,38(10):2453-2460.)

[4] HASSANIEN A,VOROBYOV S A,GERSHMAN A B. Moving target parameters estimation in non-coherent MIMO radar systems[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2012,60(5):2354-2361.

[5] LI J,STOICA P. MIMO radar with colocated antennas[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2007,24(5):106-114.

[6] 孟藏珍,许稼,谭贤四,等. MIMO-SAR 成像技术发展机遇与挑战[J]. 太赫兹科学与电子信息学报, 2015,13(3):423-430. (MENG Cangzhen,XU Jia,TAN Xiansi,et al. Development opportunities and challenges of MIMO-SAR imaging technology[J]. Journal of Terahertz Science and Electronic Information Technology, 2015,13(3):423-430.)

[7] WILCOX D,SELLATHURAI M. On MIMO radar subarrayed transmit beamforming[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2012,60(4):2076-2081.

[8] FUHRMANN D R,ANTONIO J S. Transmit beamforming for MIMO radar systems using signal cross-correlation[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2008,44(1):171-185.

[9] AHMED S,THOMPSON J S,MULGREW B. Unconstrained synthesis of covariance matrix for MIMO radar transmit beampattern[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2011,59(8):3837-3849.

[10] STOICA P,LI J,ZHU X. Waveform synthesis for diversity-based transmit beampattern design[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2008,56(6):2593-2598.

[11] AHMED S,THOMPSON J S,MULGREW B,et al. Finite alphabet constant-envelope waveform design for MIMO radar beampattern[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2011,59(11):5326-5337.

[12] HASSANIEN A,VOROBYOV S A. Transmit energy focusing for DOA estimation in MIMO radar with colocated antennas[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2011,59(6):2669-2682.

[13] AHMED S,ALOUINI M S. MIMO radar transmit beampattern design without synthesizing the covariance matrix[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2014,62(9):2278-2289.

[14] KHABBAZIBASMENJ A,HASSANIEN A,VOROBYOV S A,et al. Efficient transmit beamspace design for search-free based DOA estimation in MIMO radar[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2014,62(6):1490-1500.

[15] LUO Z Q,MA W K,SO A C,et al. Semidefinite relaxation of quadratic optimization problems[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2010,27(3):20-34.

[16] BOYD S,VANDENBERGHE L. Convex Optimization[M]. Cambridge:Cambridge University Press, 2004.

[17] GRANT M,BOYD S. CVX: Matlab software for disciplined convex programming[R/OL]. CVX Research, 2008[2016-12-19]. http://cvxr.com/cvx/.

作者简介：

李玉翔(1987-)，男，河南省安阳市人，在读博士研究生，主要研究方向为 MIMO 雷达波形设计、阵列信号处理.email:liyuxiangwork@163.com.

郑娜娥(1984-)，女，福建省漳州市人，博士，讲师，主要研究方向为空间目标信息获取与处理、雷达资源分配.

王　浩(1987-)，男，河南省信阳市人，硕士，助理工程师，主要研究方向为空间目标信息获取与处理技术.

胡捍英(1961-)，男，河南省内乡县人，博士，教授，博士生导师，主要研究方向为无线通信和空间信息技术.