第 15 卷　第 4 期　　太赫兹科学与电子信息学报　　Vo1. 15, No. 4
2017 年 8 月　　Journal of Terahertz Science and Electronic Information Technology　　Aug., 2017

文章编号：2095-4980(2017)04-0652-05

一种优化参数的 LOD-FDTD 算法及其数值特性

苏　敏，刘培国

(国防科学技术大学　电子科学与工程学院，湖南　长沙　410073)

摘　要： 提出一种改进的参数优化局部一维时域有限差分(LOD-FDTD)方法，该方法将时间步长等分成 3 步，沿坐标方向加上色散控制因子，以降低数值色散误差。本文首先证明改进方法的稳定性，并分析其数值色散误差。结果表明改进方法的数值色散误差小于传统的 LOD-FDTD 方法。

关键词： 局部一维时域有限差分；色散控制因子；稳定性；数值色散；CFL 条件数

中图分类号： TN911　　**文献标志码：** A　　**doi：** 10.11805/TKYDA201704.0652

A parameter optimized LOD-FDTD method and its numerical dispersion analysis

SU Min，LIU Peiguo

(College of Electronic Science and Engineering，National University of Defense Technology，Changsha Hunan 410073，China)

Abstract: An improved 3-D Locally One-Dimensional Finite-Difference Time-Domain (LOD-FDTD) method is presented. In the proposed method, the time step is divided into three sub-steps. Dispersion control parameters are introduced into *X*, *Y* and *Z* directions. The results show that the method is stable and the normalized numerical phase velocity errors are smaller than that of the conventional LOD-FDTD method.

Keywords: Locally One-Dimensional Finite-Difference Time-Domain; dispersion controls parameters; stability; numerical dispersion; Courant Friedrich Lewy(CFL) limit

传统的 FDTD 方法由于受到 CFL 条件的限制[1]，影响了计算细微结构的效率。为了克服这些问题，无条件稳定的 LOD-FDTD 方法[2]应运而生，但是 LOD-FDTD 方法的数值色散却比传统的 FDTD 方法要大。现有的文献提出了各种方法[3-4]用于解决数值散射误差大的问题，如，高阶格式就是一个常用的减少色散误差的方法[5-6]。此外，还有文献研究了优化的 LOD-FDTD 方法以减少其色散误差，其利用的方法是非线性规划方法实现对目标函数的优化[7]。本文提出了一个新的改进色散误差的方法，直接在矩阵前面加控制因子，相比已有文献[8]，既减少了计算量，又保证了计算精确度。

1　改进方法公式推导

在本文中，定义波在一个线性、无耗的自由媒质中传播。

1.1 改进方法公式

麦克斯韦方程写成如下形式[1]：

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\varepsilon\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\qquad \nabla\times\boldsymbol{E}=-\mu\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}\tag{1}$$

式中：$\boldsymbol{H}$ 是磁场强度；$\boldsymbol{E}$ 是电场强度；ε 是电常数；μ 是磁导系数。真空中 $\varepsilon=8.85\times10^{-12}$ F/m；$\mu=4\pi\times10^{-7}$ H/m。

式(1)沿坐标轴方向展开如下：

收稿日期： 2015-12-11；**修回日期：** 2016-03-04

基金项目： 国家安全重大基础研究资助项目(973 项目)(613138，613165)；国家自然科学基金资助项目(61372029)

$$\boldsymbol{\phi}^{n+1}=\frac{\left([\boldsymbol{I}]+\frac{\Delta t}{2}[\boldsymbol{A}]\right)\left([\boldsymbol{I}]+\frac{\Delta t}{2}[\boldsymbol{B}]\right)\left([\boldsymbol{I}]+\frac{\Delta t}{2}[\boldsymbol{C}]\right)}{\left([\boldsymbol{I}]-\frac{\Delta t}{2}[\boldsymbol{A}]\right)\left([\boldsymbol{I}]-\frac{\Delta t}{2}[\boldsymbol{B}]\right)\left([\boldsymbol{I}]-\frac{\Delta t}{2}[\boldsymbol{C}]\right)}\boldsymbol{\phi}^{n} \tag{2}$$

式中： $\boldsymbol{\phi}=\left[E_x,E_y,E_z,H_x,H_y,H_z\right]^{\mathrm{T}}$； Δt 是时间步长； $\boldsymbol{I}$ 是单位矩阵。

1.2 稳定性的证明

之前有学者在研究基于交替方向隐格式(Alternate Direction Implicit，ADI)的无条件稳定 FDTD 算法时，通过在矩阵中加入控制因子[9]的方法，提高了计算精确度。本文采用与 ADI-FDTD 方法类似的优化方法，在麦克斯韦分解矩阵的 3 个方向上加上色散控制因子 C_x,C_y 和 C_z，同时时间推进从 n 到 n+1/3，接着是 n+1/3 到 n+2/3，n+2/3 到 n+1。式(2)按以下 3 步计算：

分步 1：

$$\boldsymbol{\phi}^{n+1/3}=\frac{\left([\boldsymbol{I}]+\frac{\Delta t}{2}C_x[\boldsymbol{A}]\right)}{\left([\boldsymbol{I}]-\frac{\Delta t}{2}C_x[\boldsymbol{A}]\right)}\boldsymbol{\phi}^{n}=[\Lambda_1]\boldsymbol{\phi}^{n}\qquad n\to n+1/3 \tag{3}$$

分步 2：

$$\boldsymbol{\phi}^{n+2/3}=\frac{\left([\boldsymbol{I}]+\frac{\Delta t}{2}C_y[\boldsymbol{B}]\right)}{\left([\boldsymbol{I}]-\frac{\Delta t}{2}C_y[\boldsymbol{B}]\right)}\boldsymbol{\phi}^{n+1/3}=[\Lambda_2]\boldsymbol{\phi}^{n+1/3}\qquad n+1/3\to n+2/3 \tag{4}$$

分步 3：

$$\boldsymbol{\phi}^{n+1}=\frac{([\boldsymbol{I}]+\frac{\Delta t}{2}C_z[C])}{([\boldsymbol{I}]-\frac{\Delta t}{2}C_z[C])}\boldsymbol{\phi}^{n+2/3}=[\Lambda_3]\boldsymbol{\phi}^{n+2/3}\qquad n+2/3\to n+1 \tag{5}$$

分步场写成如下形式[7]:

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{E}_{\alpha}^{n}(i,j,k)=\boldsymbol{E}_{\alpha}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(k_x i\Delta x+k_y j\Delta y+k_z k\Delta z)}=E_{\alpha}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\Delta tn}\\&\boldsymbol{H}_{\alpha}^{n}(i,j,k)=\boldsymbol{H}_{\alpha}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(k_x i\Delta x+k_y j\Delta y+k_z k\Delta z)}=H_{\alpha}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\Delta tn}\\&\phi^{n}=\phi^{0}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\Delta tn}\end{aligned} \tag{6}$$

式中：α=x,y,z； $k_x=k\sin\theta\cos\varphi,k_y=k\sin\theta\sin\varphi,k_z=k\cos\theta$。合并式(3)~(5)， $\boldsymbol{\phi}^{n+1}=[\Lambda]\phi^{n}$。

利用 Matlab 软件，计算出矩阵 $[\Lambda]$ 的特征值：

$$\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=\xi_1+\mathrm{j}\sqrt{1-\xi_1^2},\lambda_4=\xi_1-\mathrm{j}\sqrt{1-\xi_1^2},\lambda_5=\xi_2+\mathrm{j}\sqrt{1-\xi_2^2},\lambda_6=\xi_2-\mathrm{j}\sqrt{1-\xi_2^2} \tag{7}$$

此处，

$$\xi_1=\frac{\left[1+b^3d^3C_x^2C_y^2C_z^2P_x^2P_y^2P_z^2-dbC_x^2P_x^2-dbC_y^2P_y^2-dbC_z^2P_z^2-b^2d^2C_x^2C_y^2P_x^2P_y^2-b^2d^2C_x^2C_z^2P_x^2P_z^2-b^2d^2C_y^2C_z^2P_y^2P_z^2+4db\sqrt{db}P_xP_yP_z\right]}{A_xA_yA_z}$$

$$\xi_2=\frac{\left[1+b^3d^3C_x^2C_y^2C_z^2P_x^2P_y^2P_z^2-dbC_x^2P_x^2-dbC_y^2P_y^2-dbC_z^2P_z^2-b^2d^2C_x^2C_y^2P_x^2P_y^2-b^2d^2C_x^2C_z^2P_x^2P_z^2-b^2d^2C_y^2C_z^2P_y^2P_z^2-4db\sqrt{db}P_xP_yP_z\right]}{A_xA_yA_z}$$

这里， $A_{\alpha}=1+bdC_{\alpha}^2P_{\alpha}^2,B_{\alpha}=1-bdC_{\alpha}^2P_{\alpha}^2,b=\Delta t/2\varepsilon,d=\Delta t/2\mu,\alpha=x,y,z$； $P_d=\frac{-2\sin\left(\frac{k_{\alpha}\Delta\alpha}{2}\right)}{\Delta\alpha},\partial/\partial\alpha=jP_{\alpha}$。

从式(7)可以容易得到 $|\lambda_1|=|\lambda_2|=|\lambda_3|=|\lambda_4|=|\lambda_5|=|\lambda_6|=1$，表明了优化方法的稳定性。特别的，当 C_x=C_y=C_z=1，优化方法变成了传统的 LOD-FDTD 法。

2　数值误差分析

2.1 数值色散分析

不同特征值下的数值色散误差是不同的，具体如下：

情况 1，λ=λ_3 或 λ=λ_4，数值色散值为：

$$\tan^2\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right)=\frac{\begin{bmatrix} bdC_x^2P_x^2+bdC_y^2P_y^2+bdC_z^2P_z^2+b^2d^2C_x^2C_y^2P_x^2P_y^2+ \\ b^2d^2C_x^2C_z^2P_x^2P_z^2+b^2d^2C_y^2C_z^2P_y^2P_z^2-2bd\sqrt{bd}C_xC_yC_zP_xP_yP_z \end{bmatrix}}{1+b^3d^3C_x^2C_y^2C_z^2P_x^2P_y^2P_z^2+2bd\sqrt{bd}C_xC_yC_zP_xP_yP_z};$$

情况 2，$\lambda=\lambda_5$ 或 $\lambda=\lambda_6$，数值色散值为：

$$\tan^2\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right)=\frac{\begin{bmatrix} bdC_x^2P_x^2+bdC_y^2P_y^2+bdC_z^2P_z^2+b^2d^2C_x^2C_y^2P_x^2P_y^2+ \\ b^2d^2C_x^2C_z^2P_x^2P_z^2+b^2d^2C_y^2C_z^2P_y^2P_z^2+2bd\sqrt{bd}C_xC_yC_zP_xP_yP_z \end{bmatrix}}{1+b^3d^3C_x^2C_y^2C_z^2P_x^2P_y^2P_z^2-2bd\sqrt{bd}C_xC_yC_zP_xP_yP_z};$$

情况 3，$\lambda=\lambda_1$ 或 $\lambda=\lambda_2$，数值色散值为：

$$\tan^2\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right)=\frac{\begin{bmatrix} bdC_x^2P_x^2+bdC_y^2P_y^2+bdC_z^2P_z^2+b^2d^2C_x^2C_y^2P_x^2P_y^2+ \\ b^2d^2C_x^2C_z^2P_x^2P_z^2+b^2d^2C_y^2C_z^2P_y^2P_z^2 \end{bmatrix}}{1+b^3d^3C_x^2C_y^2C_z^2P_x^2P_y^2P_z^2}。$$

2.2 色散控制因子的计算

色散控制因子通过以下步骤得到：

1) 令 $v_\varphi/c=1$，色散因子为

$$C_x=\frac{\tan(\pi c\Delta t/\lambda)}{\sqrt{bd}P_x},\ C_y=\frac{\tan(\pi c\Delta t/\lambda)}{\sqrt{bd}P_y},\ C_z=\frac{\tan(\pi c\Delta t/\lambda)}{\sqrt{bd}P_z} \quad (8)$$

v_φ是相速。在 x 方向，设定 $\theta=90°,\varphi=0°$；在 y 方向，设定 $\theta=90°,\varphi=90°$；在 z 方向，设定 $\theta=0°$。

2) 数值色散分析

定义 $\Delta x=\Delta y=\Delta z=\lambda/CPW$。数值色散精确度与入射角度、CFL 条件数(CFLN)、单位波长内的网格数(CPW)有关。

为了更明确地描述，下面以情况 3 为例来讨论归一化相速度误差。

图 1 研究了 CFLN=5,CPW=20 时，入射角度下的色散误差，结果表明色散误差的极值是在 $\theta=45°$ 和 $\varphi=45°$ 处。

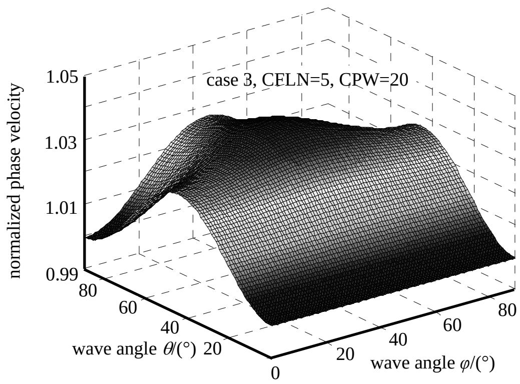

Fig.1 Normalized phase velocity(v_ϕ/c) vs. all angles of propagation at CFLN=5, CPW=20 for case 3.

图 1 情况 3 中归一化相速度随入射角度的变化(CFLN=5, CPW=20)

图 2(a)是传统的 LOD-FDTD 方法，最大误差 6.494。图 2(b)是改进的 LOD-FDTD 方法，最大误差是 3.542 7，比传统的方法误差减少 45.5%，结果表明新方法能大大减少误差。

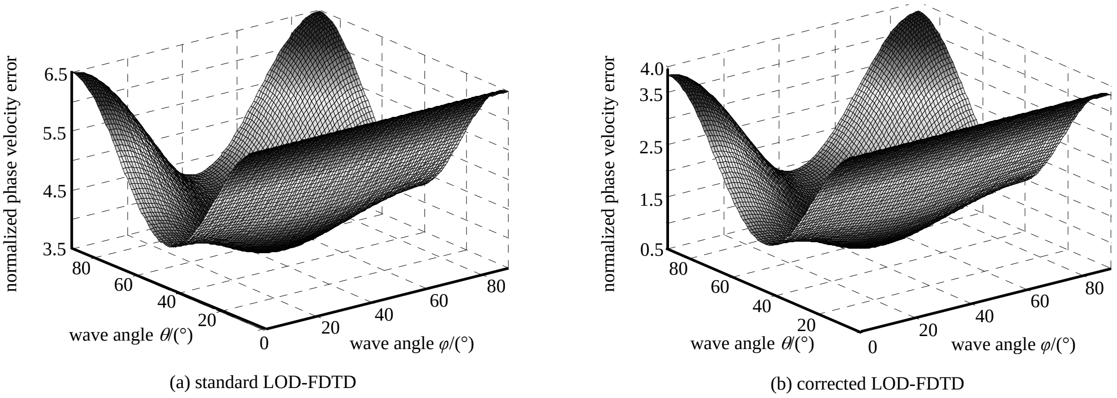

Fig.2 Normalized phase velocity error(|1−v_φ/c|×100%) versus all angles of propagation at CFLN=5, CPW=20

图 2 归一化相速度随入射角度的变化(CFLN=5, CPW=20)

图 3 显示的是在 CPW=20, $\theta=45°$ 时，传统 LOD-FDTD 和改进 LOD-FDTD 方法的归一化相位误差随 CFLN 的变化曲线，极值见表 1。从图中可以看出，随着条件数(CFL)的增加，归一化相误差也增加，在相同的条件数下，改进方法的误差要小得多，从表 1 还可以看出改进方法比传统方法的误差小，如，在 CFLN=5 时，改进方法比传统方法的误差小 10%。

图 4 显示的是在 CFLN=5，θ=45°时，传统 LOD-FDTD 和改进 LOD-FDTD 方法的归一化相误差随 CPW 的

变化曲线。从图 4 可以看出，归一化相误差随着 CPW 的增加而减小，在相同的 CPW 下，改进方法的误差明显要小得多。表 2 显示的是归一化数值相位误差对应的最值。当 CPW=40，φ=0°时，相比于标准的 LOD-FDTD 方法，归一化相位误差提高了 29%，而当 CPW=80，φ=0°时，相比于标准的 LOD-FDTD 方法，归一化相位误差提高了 46%。

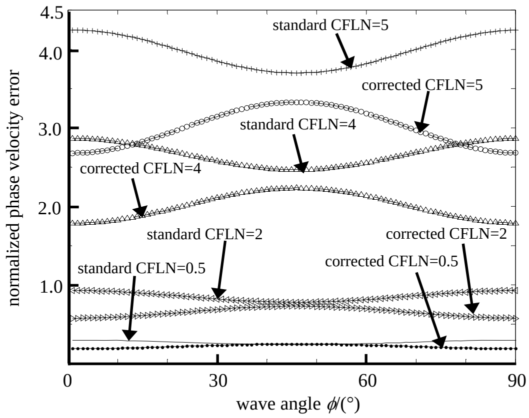

Fig.3 Normalized phase velocity error(|1-v_φ/c|×100%) versus wave angles for different CFLN. (while CPW=20, θ=45°, constant)

图 3 归一化相误差随条件数变化曲线(CPW=20, θ=45°)

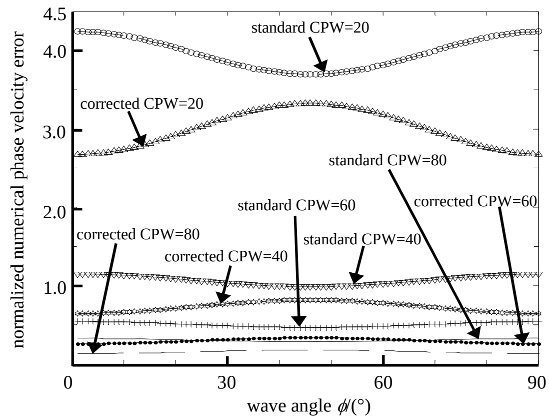

Fig.4 Normalized phase velocity error(|1-v_φ/c|×100%) versus wave angles for different CPW(while CFLN=5, θ=45°, constant)

图 4 归一化相误差随 CPW 的变化曲线(当 CFLN=5, θ=45°)

表 1 优化前后的色散误差在不同 CFLN 下的最值

Table1 Extremum of normalized phase velocity error for different CFLN

algorithm	CFLN		
	0.5	2	4
standard maximum	0.293 4	0.924 0	2.862 2
standard minimum	0.235 7	0.775 1	2.463 8
corrected maximum	0.242 8	0.725 1	2.230 5
corrected minimum	0.184 8	0.571 0	1.780 8

表 2 优化前后的色散误差在不同 CPW 下的最值

Table2 Extremum of normalized phase velocity error for different CPW

algorithm	CPW			
	20	40	60	80
standard maximum	4.241 4	1.147 3	0.539 9	0.324 5
standard minimum	3.695 8	0.983 8	0.464 8	0.281 8
corrected maximum	3.324 4	0.814 1	0.334 9	0.174 8
corrected minimum	2.674 5	0.642 2	0.258 1	0.131 5

3 结论

本文从麦克斯韦方程组出发，推导了改进方法的计算公式，分析了方法的稳定性和色散关系，从以上的分析可以看出，改进方法具有无条件稳定性，在减少色散误差方面效果较好。

参考文献:

[1] TAFLOVE A. Computational Electrodynamics: the Finite-Difference Time-Domain Method[M]. Norwood,MA:Artech House, 2005.

[2] JIM DOUGLAS Jr,SEONGJAI KIM. Improved accuracy for locally one-dimensional methods for parabolic equations[J]. Mathematical Models & Methods in Applied Sciences, 2008,11(9):1563-1579.

[3] LI E,AHMED I,VAHLDIECK R. Numerical dispersion analysis with an improved LOD-FDTD method[J]. IEEE Microwave & Wireless Components Letters, 2007,17(5):319-321.

[4] FU W,TAN E L. Stability and dispersion analysis for higher order 3-D ADI-FDTD method[J]. IEEE Transactions on Antennas & Propagation, 2005,53(11):3691-3696.

[5] KONG Y D,CHU Q X. High-order split-step unconditionally-stable FDTD methods and numerical analysis[J]. IEEE Transactions on Antennas & Propagation, 2011,59(9):3280-3289.

[6] ZHEN F,CHEN Z,ZHANG J. Toward the development of a three-dimensional unconditionally stable finite-difference time-domain method[J]. IEEE Transactions on Microwave Theory & Techniques, 2000,48(9):1550-1558.

[7] KIRKPATRICK S,GELATT C D,VECCHI M P. Optimization by simulated annealing[J]. Science, 1992,220(4598):671-680.

[8] XIA F,CHU Q X. The comparison of the stability on the extended 3D LOD-FDTD and ADI-FDTD methods including lumped elements[C]// International Conference on Microwave and Millimeter Wave Technology. Shenzhen,China:[s.n.], 2012:1-4.

[9] FU W,TAN E L. A parameter optimized ADI-FDTD method based on the (2,4) stencil[J]. IEEE Transactions on Antennas & Propagation, 2006,54(6):1836-1842.

(下转第 669 页)