文章编号：2095-4980(2019)05-0854-07

频变交叉耦合带通滤波器的耦合矩阵综合研究

方芝清，吕立明，曾　荣，李智鹏，唐高弟

(中国工程物理研究院 电子工程研究所，四川 绵阳 621999)

摘　要：综合代表滤波器拓扑结构和特性的耦合矩阵是交叉耦合滤波器设计的重点。提出了一种基于广义特征值的优化综合方法，通过非线性最小二次求解，将耦合矩阵的广义特征值逼近至广义切比雪夫响应多项式传输函数零极值参考点，优化求解出带有频变交叉耦合带通滤波器的耦合矩阵。通过 3 个数值实例演示了该方法，并验证其有效性。这是对经典带通滤波器耦合矩阵综合方法的补充，为频变交叉耦合滤波器的设计建立了基础。

关键词：频变耦合系数；耦合矩阵综合；交叉耦合；广义切比雪夫滤波器；带通滤波器

中图分类号：TN713^{+}.5　　**文献标志码：**A　　**doi：**10.11805/TKYDA201905.0854

Coupling matrix synthesis for cross-coupling bandpass filters with frequency-dependent coupling

FANG Zhiqing，LYU Liming，ZENG Rong，LI Zhipeng，TANG Gaodi

(Institute of Electronic Engineering，China Academy of Engineering Physics，Mianyang Sichuan 621999，China)

Abstract：The coupling matrix synthesis which represents the topology and characteristics of the filter，is the focus of the cross-coupling filter design. In this paper, a generalized eigenvalue-based optimization synthesis method is proposed. Through the nonlinear least-squares solution, the generalized eigenvalues of the coupling matrix are approximated to reference point of the zeros of the polynomial of the generalized Chebyshev response transfer function, and the optimal solution of the coupling matrix is obtained. This is a supplement to the classical bandpass filter coupling matrix synthesis method, and establishes the basis for the design of the frequency-dependent cross-coupling filters.

Keywords：frequency-dependent coupling；coupling matrix synthesis；cross-coupling；generalized Chebyshev filters；bandpass filter

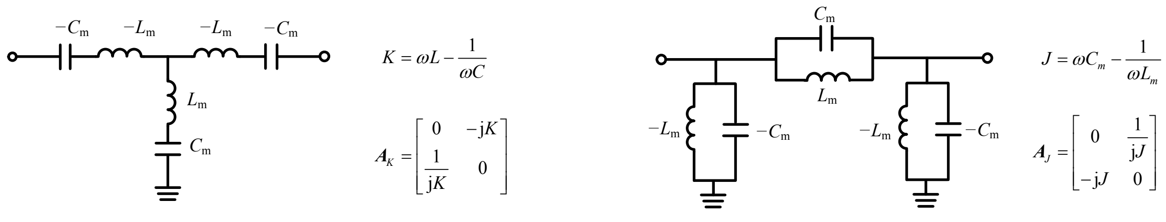
构造矩阵形式的滤波器电路非常实用，可以进行一些矩阵操作，如求逆、相似变换和分解，这些操作简化了复杂电路的综合、拓扑重构，以及性能仿真等。自 1970 年 Atia 和 Williams 提出其概念以来[1]，代表滤波器拓扑结构和特性的耦合矩阵成为交叉耦合滤波器设计的重点，其中最为重要的是综合方法。Cameron 等提出的解析综合法明确了耦合矩阵的物理含义并可利用矩阵相似变换进行滤波器的拓扑重构[2−3]，而采用优化综合方法可以直接综合出任意结构所期望的耦合矩阵，从而避免了解析方法繁多的变换过程。基于带通滤波器低通原型的传输零点和极点，可以完整描述该滤波器的特性，S. Amari 提出了基于零极点 S_{21} 和 S_{11} 构建目标函数的优化方法[4]；由于耦合矩阵的特征值与零极点一一对应，因此，M. Mrozowski 提出一种更具效率的矩阵特征值逼近方法[5]。这些方法的前提是内部谐振器之间的耦合与频率无关，通常在窄带下适用，但当滤波器带宽超过一定范围[6]，或小型化设计中谐振器间不可避免地存在混合电磁耦合时，耦合系数随频率变化，以上的综合方法不再适用。另一方面，频变耦合滤波器具有一定优势：带外可形成额外的传输零点[7−8]，可以较低的阶数达到原本需要更高阶滤波器才能提供的频率选择性，节省所需的谐振器个数，减小滤波器的损耗和体积；频变耦合形成的传输零点可以独立设计与调节，不干扰其他零点[9]。因此，开展频变耦合矩阵综合方法的研究非常必要。2012 年，Lukasz 等提出了基于线性矩阵束的特征值优化方法[10]，专门针对频率交叉耦合的情况；2016 年，褚庆昕阐述了一种非交叉混合耦合矩阵的梯度优化方法[11]。本文提出一种基于矩阵广义特征值优化方法，优化求解出广义切比雪夫响应带通滤波器的耦合矩阵，建立了频变耦合滤波器的设计基础。

收稿日期：2017-11-21；**修回日期：**2018-03-29

1　理论基础

1.1 频变耦合系数的线性近似

利用耦合矩阵模型、K 阻抗变换器模型或 J 导纳变换器模型可以直接综合出滤波器的物理尺寸。文献[12]列举了变换器的等效集总电路，而混合电磁耦合的 J/K 变换器的集总电路形式如图 1 所示[13]。



(a) *K* impedance converter of mixed electromagnetic coupling　　(b) *J* admittance converter of mixed electromagnetic coupling

Fig.1 Lumped circuits of the J/K converters and ABCD matrixes

图 1 混合电磁耦合 J/K 变换器集总形式及对应的 ABCD 矩阵

对于混合 K 变换器，应用在上下通带边沿角频率分别为 ω_1,ω_2，中心角频率为 ω_0 的窄带滤波器(谐振器为串联 L_0 与 C_0 等效模型)，ω 为带通角频率， ω_Δ 为角频率偏移；其低通原型归一化耦合系数为：

$$m=\frac{\omega L_m-\dfrac{1}{\omega C_m}}{L_0(\omega_2-\omega_1)}\approx\frac{L_m}{L_0}\left(\frac{\omega_0}{\omega_2-\omega_1}+\frac{\omega_\Delta}{\omega_2-\omega_1}\right)-\frac{C_0}{C_m}\left(\frac{\omega_0}{\omega_2-\omega_1}-\frac{\omega_\Delta}{\omega_2-\omega_1}\right)=\frac{1}{FBW}\left(\frac{L_m}{L_0}-\frac{C_m}{C_0}\right)+\frac{\Omega}{2}\left(\frac{L_m}{L_0}+\frac{C_0}{C_m}\right)\tag{1}$$

式中：m 为低通原型归一化耦合系数；C_m,L_m 为耦合器件的等效电容、电感；Ω 为归一化低通原型角频率；FBW 为带通滤波器的相对带宽。其中，各变量之间存在特定关系：

$$L_0C_0=\frac{1}{{\omega_0}^2}=\frac{1}{\omega_2\omega_1},\ \omega=\omega_0+\omega_\Delta,\ \Omega=\frac{\omega_0}{\omega_2-\omega_1}\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)\approx\frac{2\omega_\Delta}{\omega_2-\omega_1}\tag{2}$$

等式成立条件：

$$\frac{\omega_2-\omega_1}{\omega_0}\Omega^2\ll 4\tag{3}$$

对窄带滤波器通带内或附近，等式条件是成立的。

同样的，混合 J 变换器，应用在上下通带边沿角频率分别为 ω_1,ω_2，中心角频率为 ω_0 的窄带滤波器上(谐振器为并联 L_0 与 C_0 等效模型)，其低通原型归一化耦合系数为：

$$m=\frac{\omega C_m-\dfrac{1}{\omega L_m}}{C_0(\omega_2-\omega_1)}\approx\frac{C_m}{C_0}\left(\frac{\omega_0}{\omega_2-\omega_1}+\frac{\omega_\Delta}{\omega_2-\omega_1}\right)-\frac{L_0}{L_m}\left(\frac{\omega_0}{\omega_2-\omega_1}-\frac{\omega_\Delta}{\omega_2-\omega_1}\right)=\frac{1}{FBW}\left(\frac{C_m}{C_0}-\frac{L_0}{L_m}\right)+\frac{\Omega}{2}\left(\frac{C_m}{C_0}+\frac{L_0}{L_m}\right)\tag{4}$$

由式(1)和式(3)可知，混合电磁耦合的归一化耦合系数 m 随频率发生变化，所以混合电磁耦合也称为频变耦合。在窄带条件下，通带内或带外近端，频变部分可做线性等效近似，斜率绝对值为磁耦合系数与电耦合系数的均值。

1.2 频变耦合矩阵及其广义特征值

图 2 是由 N 个无耗谐振回路构成的交叉耦合谐振网络[4]，其中谐振器 i 与 j 之间存在频率无关的耦合，耦合系数 $M_{ij}=M_{ji}$；内阻为 R_1 的单位电压源激励谐振器 1；输出负载电阻为 R_2，与谐振器 N 相连接。

根据基尔霍夫定律，其回路方程为[4]：

$$[\omega\boldsymbol{U}-\mathrm{j}\boldsymbol{R}+\boldsymbol{M}][\boldsymbol{I}]=-\mathrm{j}[\boldsymbol{e}]\tag{5}$$

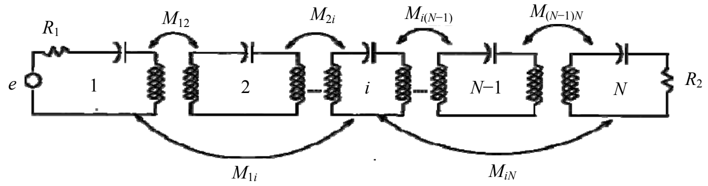


Fig.2 Model of a general cross-coupled resonator bandpass filter

图 2 交叉耦合带通滤波器网络模型

式中：ω 为归一化低通原型角频率；j为虚数单位；$\boldsymbol{U}$ 为 $N\times N$ 单位矩阵；$\boldsymbol{R}$ 除第 1 行第 1 列为 R_1 和第 N 行第 N 列为 R_2 外，其余元素均为零；$\boldsymbol{M}$ 为 $N\times N$ 耦合矩阵；$\boldsymbol{I}$ 为各节点电流构成的 n 阶向量；$\boldsymbol{e}$ 为 N 阶向量，且 $\boldsymbol{e}=[1,0,\cdots,0]$。

当耦合网络存在频变节点时，对频变部分作线性近似，此时频变分量除对角线上元素为 1 的单位矩阵 $\boldsymbol{U}$ 外，在非对角线上的频变耦合节点处，同时存在不为零的 m_1^{ij}，因此可将由单位矩阵和频变节点处的分量一起构成的频率相关矩阵记为 $\boldsymbol{M}_1$，非频变部分记为 $\boldsymbol{M}_0$，新的回路方程为：

$$[\omega\boldsymbol{M}_1-\mathrm{j}\boldsymbol{R}+\boldsymbol{M}_0][\boldsymbol{I}]=-\mathrm{j}[\boldsymbol{e}] \tag{6}$$

相应的，滤波器的 S 参数为[14-15]：

$$S_{21}=2\sqrt{R_1R_2}i_N=-2\mathrm{j}\sqrt{R_1R_2}\left[\left(\omega\boldsymbol{M}_1-\mathrm{j}\boldsymbol{R}+\boldsymbol{M}_0\right)^{-1}\right]_{N1} \tag{7}$$

$$S_{11}=1-2R_1i_1=1+2\mathrm{j}R_1\left[\left(\omega\boldsymbol{M}_1-\mathrm{j}\boldsymbol{R}+\boldsymbol{M}_0\right)^{-1}\right]_{11} \tag{8}$$

式中 i_1,i_N 分别为电流向量 $\boldsymbol{I}$ 的第 1 个和第 N 个元素，即第 1 个和第 N 个回路的电流。

在计算矩阵逆时引入代数余子式，则有

$$S_{21}=-2\mathrm{j}\sqrt{R_1R_2}\frac{\det(\omega\boldsymbol{M}_1'-\mathrm{j}\boldsymbol{R}'+\boldsymbol{M}_0'')}{\det\left(\omega\boldsymbol{M}_1-\mathrm{j}\boldsymbol{R}+\boldsymbol{M}_0\right)} \tag{9}$$

$$S_{11}=1+2\mathrm{j}R_1\frac{\det(\omega\boldsymbol{M}_1''-\mathrm{j}\boldsymbol{R}''+\boldsymbol{M}_0'')}{\det\left(\omega\boldsymbol{M}_1-\mathrm{j}\boldsymbol{R}+\boldsymbol{M}_0\right)} \tag{10}$$

式中：$\boldsymbol{M}_0$ 与 $\boldsymbol{M}_1$ 为 $N\times N$ 耦合矩阵；矩阵 $\boldsymbol{R}$ 除 $R_{11}=R_1$ 和 $R_{NN}=R_2$ 外，其余元素均为零；$\boldsymbol{M}_0',\boldsymbol{M}_1',\boldsymbol{R}'$ 分别为 $\boldsymbol{M}_0,\boldsymbol{M}_1,\boldsymbol{R}$ 去掉第 1 行和最后 1 列的子矩阵；$\boldsymbol{M}_0'',\boldsymbol{M}_1'',\boldsymbol{R}''$ 分别为 $\boldsymbol{M}_0,\boldsymbol{M}_1,\boldsymbol{R}$ 去掉第 1 行和第 1 列的子矩阵。

由式(9)可知，传输函数的零极点分别与矩阵 $\omega\boldsymbol{M}_1'-\mathrm{j}\boldsymbol{R}'+\boldsymbol{M}_0',\omega\boldsymbol{M}_1-\mathrm{j}\boldsymbol{R}+\boldsymbol{M}_0$ 行列式的特征值一一对应。若记 $\boldsymbol{A}$ 为 $-\mathrm{j}\boldsymbol{R}'+\boldsymbol{M}_0'$，$\boldsymbol{B}$ 为 $-\boldsymbol{M}_1'$，则对矩阵 $\omega\boldsymbol{M}_1'-\mathrm{j}\boldsymbol{R}'+\boldsymbol{M}_0'$ 行列式特征值求解可转换为矩阵 $\boldsymbol{A}=\omega\boldsymbol{B}$ 的广义特征值求解。同样的，利用广义特征值求解可以获取矩阵 $\omega\boldsymbol{M}_1-\mathrm{j}\boldsymbol{R}+\boldsymbol{M}_0,\omega\boldsymbol{M}_1''-\mathrm{j}\boldsymbol{R}''+\boldsymbol{M}_0''$ 行列式的特征值，这利用数学软件如 Matlab 等非常容易实现。

另一方面，S 参数的多项式函数表达式[2]为：

$$S_{21}=\frac{P(\omega)}{\varepsilon E(\omega)} \tag{11}$$

$$S_{11}-1=\frac{F(\omega)-E(\omega)}{E(\omega)}=\frac{G(\omega)}{E(\omega)} \tag{12}$$

式中 $P(\omega),E(\omega),F(\omega)$ 分别为文献[2]中定义的网络传输函数的多项式。

分别考虑式(9)与式(11)，式(10)与式(12)，由于同一网络的 S 参数的零极值总是相等，因此耦合矩阵 $\omega\boldsymbol{M}_1'-\mathrm{j}\boldsymbol{R}'+\boldsymbol{M}_0',\omega\boldsymbol{M}_1-\mathrm{j}\boldsymbol{R}+\boldsymbol{M}_0,\omega\boldsymbol{M}_1''-\mathrm{j}\boldsymbol{R}''+\boldsymbol{M}_0''$ 的广义特征值向量 $\boldsymbol{\lambda}',\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\lambda}''$ 分别与多项式函数 $P(\omega),E(\omega),G(\omega)$ 的特征值向量 $\boldsymbol{\lambda P},\boldsymbol{\lambda E},\boldsymbol{\lambda G}$ 一一对应。

2 特征值优化方法

2.1 目标函数及优化思路

对耦合矩阵的优化求解首先从求解多项式函数 $P(\omega),E(\omega),G(\omega)$ 开始，获取其特征值向量 $\boldsymbol{\lambda}_0([\boldsymbol{\lambda}_P;\boldsymbol{\lambda}_E;\boldsymbol{\lambda}_G])$。然后根据拓扑结构设定耦合矩阵 $\boldsymbol{M}_1$ 和 $\boldsymbol{M}_0$ 初值，计算出耦合矩阵 $\omega\boldsymbol{M}_1'-\mathrm{j}\boldsymbol{R}'+\boldsymbol{M}_0',\omega\boldsymbol{M}_1-\mathrm{j}\boldsymbol{R}+\boldsymbol{M}_0,\omega\boldsymbol{M}_1''-\mathrm{j}\boldsymbol{R}''+\boldsymbol{M}_0''$ 的广义特征值向量 $\boldsymbol{\lambda}_1([\boldsymbol{\lambda}';\boldsymbol{\lambda};\boldsymbol{\lambda}''])$，建立目标函数：

$$\boldsymbol{C}=\left(\boldsymbol{\lambda}_0-\boldsymbol{\lambda}_1\right)^{\mathrm{H}}\left(\boldsymbol{\lambda}_0-\boldsymbol{\lambda}_1\right) \tag{13}$$

式中 H 表示向量的哈密顿转换。利用数值迭代方法，对目标函数进行非线性二次最小求解，在逐次数值迭代中，将 $\boldsymbol{\lambda}_1$ 逐渐逼近至 $\boldsymbol{\lambda}_0$，迭代优化出需要的耦合矩阵 $\boldsymbol{M}_0$ 和 $\boldsymbol{M}_1$，完成频变耦合滤波器的原型综合。

2.2 多项式综合的数学过程

作为耦合矩阵特征值的参考点，滤波器传输函数中的各多项式零极值必须先求解，对于无耗滤波器网络：

$$S_{21}^2(\omega)=\frac{1}{1+\varepsilon^2C_N^2(\omega)},\ C_N(\omega)=\frac{F(\omega)}{P(\omega)} \tag{14}$$

式中：$F(\omega),P(\omega)$ 分别为反射零点多项式和传输零点多项式；ε 为幅度响应归一化的任意常数[2]。

广义切比雪夫滤波器函数[2]为：

$$C_N(\omega)=\cosh\left[\sum_{n=1}^{N}\cosh^{-1}(x_n)\right],\ x_n=\frac{\omega-\dfrac{1}{\omega_n}}{1-\dfrac{\omega}{\omega_n}} \tag{15}$$

式中：ω 为角频率；ω_n 为第 n 个传输零点角频率。

对 $C_N(\omega)$ 恒等变形[2]后，有

$$C_N(\omega)=\frac{1}{2}\left(\frac{\prod_{n=1}^{N}(c_n+d_n)+\prod_{n=1}^{N}(c_n-d_n)}{\prod_{n=1}^{N}\left(1-\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)}\right) \tag{16}$$

式中：$c_n=\omega-\dfrac{1}{\omega_n}$；$d_n=\sqrt{\left(\omega^2-1\right)\left(1-\dfrac{1}{\omega_n^2}\right)}$。

式(16)的分母多项式的根即为传输零点，其为未归一的 $P(\omega)$。对照式(14)，其分子多项式为未归一的 $F(\omega)$，连乘项可利用递归计算[2]。由于奇次 d_n 连乘项正负相消，故 $\sqrt{\left(\omega^2-1\right)}$ 被抵消，分子项最终结果为 ω 的 n 次多项式。

已知 $P(\omega)$，在求解出 $F(\omega)$后，利用网络无耗条件[2]，有

$$E(\omega)E^*(\omega)=\left(F(\omega)-\mathrm{j}\frac{P(\omega)}{\varepsilon}\right)\left(F(\omega)-\mathrm{j}\frac{P(\omega)}{\varepsilon}\right)^* \tag{17}$$

由于 $E(s)(s=\mathrm{j}\omega)$是 Hurwitz 多项式，则 $E(\omega)$的根可以从式(13)两个相乘多项式的根中筛选出来，其根 ω 应满足条件 $\mathrm{real}(\mathrm{j}\omega)<0$，由此可确定多项式 $E(\omega)$[12]。

综上，对于传输零点为 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n$ 的广义切比雪夫响应滤波器的多项式 $P(\omega),E(\omega),G(\omega)$的根构成的特征向量 $\boldsymbol{\lambda}_0([\boldsymbol{\lambda}_P;\boldsymbol{\lambda}_E;\boldsymbol{\lambda}_G])$已全求解出。

2.3 优化变量的梯度计算

对目标函数的非线性最小二次求解中，需要计算特征值 $\boldsymbol{\lambda}$ 分别对矩阵 $\boldsymbol{M}_0$ 和 $\boldsymbol{M}_1$ 中非零单元的梯度，利用广义特征值及特征值微扰法可轻松完成。对于耦合矩阵的广义特征值，有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i=\lambda_i\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_i \tag{18}$$

式中：λ_i 为第 i 个特征值，$\boldsymbol{x}_i$ 为特征值 λ_i 对应的特征向量。

对于矩阵 $\boldsymbol{A}$，利用特征值微扰：

$$(\boldsymbol{A}+\Delta\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}_i=(\lambda_i+\Delta\lambda_i)\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_i \tag{19}$$

联立式(18)和式(19)，求微分：

$$\frac{\partial\lambda_i}{\partial A_{jk}}=\frac{\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{H}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}_i}{\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{H}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_i} \tag{20}$$

式中：A_{jk} 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 第 j 行 k 列阵元；$\boldsymbol{P}$ 为 $N\times N$ 矩阵，除 j 行 k 列和 k 行 j 列为 1 外，其余阵元为零。

对于矩阵 $\boldsymbol{B}$，利用特征值微扰：

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i=(\lambda_i+\Delta\lambda_i)(\boldsymbol{B}+\Delta\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}_i \tag{21}$$

联立式(18)与式(21)，并求微分：

$$\frac{\partial\lambda_i}{\partial B_{jk}}=-\lambda_i\frac{\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{H}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}_i}{\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{H}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_i} \tag{22}$$

同样的，求出矩阵 $\boldsymbol{M}_0$ 和 $\boldsymbol{M}_1$ 相应子矩阵特征值向量 $\boldsymbol{\lambda}',\boldsymbol{\lambda}''$对矩阵单元的梯度。

3　数值实例

优化开始时，设定矩阵 $\boldsymbol{M}_0$ 和 $\boldsymbol{M}_1$ 初值，$\boldsymbol{M}_1$ 可设定为单位矩阵，$\boldsymbol{M}_0$ 可设定为正常响应的非频变滤波器耦合矩阵。考虑到频变耦合具有小型化应用背景，阶数不宜过高，本文 3 个实例均选取经典的级联四角(Cascaded Quadruplet，CQ)、级联三角(Cascaded Triplet，CT)拓扑结构开展优化算法。

第一个应用案例为带有一个频变节点的 CT 滤波器，图 3(a)为该结构的示意图，其中圆圈 1,2,3 分别表示谐振器 1,2,3，谐振器 1 到 2、2 到 3 为直接耦合，与频率无关；谐振器 1 到 3 为频变交叉耦合节点，该结构的耦合矩阵为：

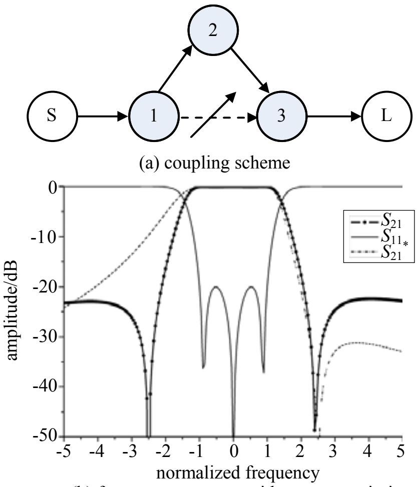
$$\boldsymbol{A}=\varOmega\begin{bmatrix}1 & 0 & m_1^{(13)}\\ 0 & 1 & 0\\ m_1^{(13)} & 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\mathrm{j}R_1+m_0^{(11)} & m_0^{(12)} & m_0^{(13)}\\ m_0^{(12)} & m_0^{(22)} & m_0^{(23)}\\ m_0^{(13)} & m_0^{(23)} & -\mathrm{j}R_2+m_0^{(33)}\end{bmatrix} \tag{23}$$

则相应需要优化的耦合矩阵阵元构成的优化变量为：

$$\boldsymbol{\varPhi}_1=\left[m_1^{(13)},m_0^{(11)},m_0^{(12)},m_0^{(13)},m_0^{(22)},m_0^{(23)},m_0^{(33)}\right] \tag{24}$$

假设该结构可实现的 2 个低通原型归一化传输零点设定为$(-2.5,2.42)$，带内回波损耗设定为−20 dB。则优化变量初值可设定为 $\boldsymbol{\varPhi}_1^{\text{initial}}=[0,0,0.96,0.44,0,0.96,0], R_1=R_2=1$。

利用非线性二次最小化求解式(13)的目标函数，优化结果见式(25)，对应的低通原型响应见图 3(b)，其中虚线为该结构无频变节点传输零点为 2.5 的低通原型响应。



(b) frequency response with two transmission zeros at ω=-2.5, ω=2.42

Fig.3 Cascaded triplet filter with frequency-dependent coupling between resonator 1 and 3

图 3 谐振器 1 与 3 为频变节点的 CT 滤波器

$$\boldsymbol{\varPhi}_1^*=[0.198\,4,0.008\,9,1.095\,4,0.019\,5,-0.018\,2,1.095\,4,0.008\,9],\ R_1=R_2=1.087\,4 \tag{25}$$

第 2 个应用案例为带有 2 个频变耦合节点的 CQ 滤波器，图 4(a)为该滤波器结构示意图，其中谐振器 1 到 2、3 到 4 的耦合与频率无关，谐振器 2 到 3 和 1 到 4 为频变耦合节点，该结构的耦合矩阵为：

$$\boldsymbol{A}=\varOmega\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & m_1^{(14)}\\ 0 & 1 & m_1^{(23)} & 0\\ 0 & m_1^{(23)} & 1 & 0\\ m_1^{(14)} & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\mathrm{j}R_1+m_0^{(11)} & m_0^{(12)} & 0 & m_0^{(14)}\\ m_0^{(12)} & m_0^{(22)} & m_0^{(23)} & 0\\ 0 & m_0^{(23)} & m_0^{(33)} & m_0^{(34)}\\ m_0^{(14)} & 0 & m_0^{(34)} & -\mathrm{j}R_2+m_0^{(44)}\end{bmatrix} \tag{26}$$

将耦合矩阵元素代入优化变量中，相应的有

$$\boldsymbol{\varPhi}_2=\left[m_1^{(14)},m_1^{(23)},m_0^{(11)},m_0^{(12)},m_0^{(14)},m_0^{(22)},m_0^{(23)},m_0^{(33)},m_0^{(34)},m_0^{(44)}\right] \tag{27}$$

此结构可实现的 3 个低通原型归一化传输零点设定为(−3,−1.71,2.5)，带内回波损耗设定为−20 dB。优化变量初值可设定为 $\boldsymbol{\varPhi}_2^{\text{initial}}=[0,0,0,0.89,-0.1,0,0.74,0,0.89,0],\ R_1=R_2=1$。

利用非线性二次最小化求解式(13)的目标函数，优化结果见式(28)，其相应的低通原型响应见图 4(b)，其中虚线为该结构对应的不带频变节点 2 个传输零点为(−3,2.5)的低通原型响应。

$$\boldsymbol{\varPhi}_2^*=[0.045\,0,-0.371\,3,-0.018\,2,0.844\,6,0.099\,6,0.363\,4,-0.773\,1,0.363\,4,0.844\,6,-0.018\,2],\ R_1=R_2=1.048\,7 \tag{28}$$

第 3 个应用案例为带有一个频变耦合节点的 CQ 滤波器，图 5(a)为该滤波器结构示意图，其中谐振器 1 到 2、2 到 3、2 到 4、3 到 4 的耦合与频率无关，谐振器 1 到 4 为频变交叉耦合节点，该结构的耦合矩阵为：

$$\boldsymbol{A}=\varOmega\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & m_1^{(14)}\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ m_1^{(14)} & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\mathrm{j}R_1+m_0^{(11)} & m_0^{(12)} & 0 & m_0^{(14)}\\ m_0^{(12)} & m_0^{(22)} & m_0^{(23)} & m_0^{(24)}\\ 0 & m_0^{(23)} & m_0^{(33)} & m_0^{(34)}\\ m_0^{(14)} & m_0^{(24)} & m_0^{(34)} & -\mathrm{j}R_2+m_0^{(44)}\end{bmatrix} \tag{29}$$

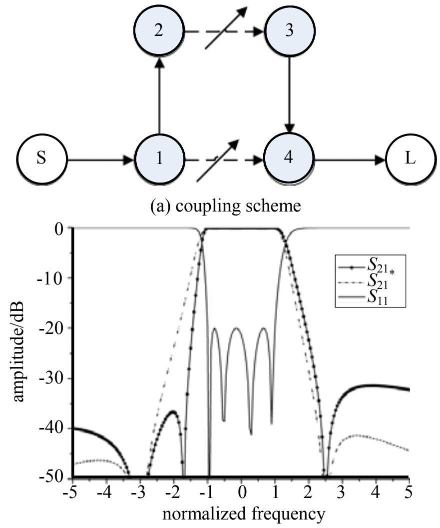
将耦合矩阵元素代入优化变量中，有

$$\boldsymbol{\varPhi}_3=\left[m_1^{(14)},m_0^{(11)},m_0^{(12)},m_0^{(14)},m_0^{(22)},m_0^{(23)},m_0^{(24)},m_0^{(33)},m_0^{(34)},m_0^{(44)}\right] \tag{30}$$

此结构可实现的 3 个低通原型归一化传输零点设为(−2.5,1.71,3)，带内回波损耗设为−20 dB。优化变量初值为 $\boldsymbol{\varPhi}_3^{\text{initial}}=[0,0,0.89,-0.1,0,0.74,0,0,0.89,0],\ R_1=R_2=1$。

利用非线性二次最小化求解式(13)的目标函数，优化结果见式(31)，其相应的低通原型响应见图 5(b)，其中虚线为该结构无频变节点传输零点为(−2.5,3)的低通原型响应。

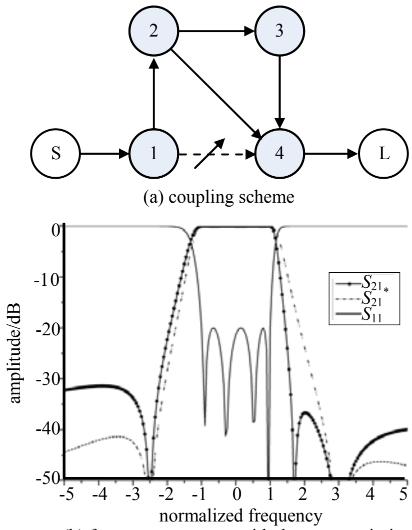
$$\boldsymbol{\varPhi}_3^*=[0.045\,0,-0.371\,0,-0.018\,2,0.844\,6,0.099\,6,0.363\,4,-0.773\,1,0.363\,4,0.844\,6,-0.018\,2],\ R_1=R_2=1.048\,7 \tag{31}$$



(b) frequency response with three transmission zeros at ω=-3, ω=-1.71, ω=2.5

Fig.4 Cascaded quadruplet filter with frequency-dependent coupling between resonator 1 and 4, 2 and 3

图 4 谐振器 1 到 4，2 到 3 为频变节点的 CQ 滤波器



(b) frequency response with three transmission zeros at ω=-2.5, ω=-1.71, ω=3

Fig 5 Cascaded quadruplet filter with frequency-dependent coupling between resonator 1 and 4

图 5 谐振器 1 与 4 为频变节点的 CQ 滤波器

4　结论

耦合系数随频率变化的交叉耦合滤波器可在带外形成额外传输零点，从而加强滤波器的频率选择性；通过将耦合矩阵的广义特征值对应到传输函数的零极值点，并利用数值优化方法对目标函数进行非线性二次最小求解，可以综合出具有广义切比雪夫响应的频变交叉耦合矩阵，这补充了经典的滤波器原型综合方法，为频变耦合滤波器设计提供了依据。

参考文献：

[1] ATIA A,WILLIAMS A,NEWCOMB R. Narrow-band multiple-coupled cavity synthesis[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems, 1974,21(5):649–655.

[2] CAMERON R J. General coupling matrix synthesis methods for Chebyshev filtering functions[J]. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, 1999,47(4):433–442.

[3] CAMERON R J. Advanced coupling matrix synthesis techniques for microwave filters[J]. IEEE Transactions on Microwave Theory and Technique, 2003,51(1):1–10.

[4] AMARI S. Synthesis of cross-coupled resonator filters using an analytical gradient-based optimization technique[J]. IEEE Transactions on Microwave Theory and Technique, 2000,48(9):1559–1564.

[5] LAMECKI A,KOZAKOWSKI P,MROZOWSKI M. Fast synthesis of coupled-resonator filters[J]. Microwave and Wireless Components Letters, 2004,14(4):174–176.

[6] AMARI S,BEKHEIT M,SEYFERT F. Notes on bandpass filters whose inter-resonator coupling coefficients are linear functions of frequency[C]// IEEE MTT-S International Microwave Symposium Digest. Atlanta,GA,USA:IEEE, 2008:1207–1210.

[7] ROSENBERG U,AMARI S,SEYFERT F. Pseudo-elliptic direct-coupled resonator filters based on transmission-zero-generating irises[C]// The 40th European Microwave Conference. Paris,France:IEEE, 2010:962–965.

[8] KOZAKOWSKI P,LAMECKI A,MONGIARDO M,et al. Computer-aided design of in-line resonator filters with multiple elliptical apertures[C]// IEEE MTT-S International Microwave Symposium Digest. Fort Worth,TX,USA:IEEE, 2004:611–614.

[9] SZYDLOWSKI Lukasz,LAMECKI Adam,MROZOWSKI Michal. A novel coupling matrix synthesis technique for generalized Chebyshev filters with resonant source-load connection[J]. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, 2013,61(10):3568–3577.

[10] 褚庆昕,涂治红,陈付昌,等. 新型微波滤波器的理论与设计[M]. 北京:科学出版社，2016. (CHU Qingxin,TU Zhihong,CHEN Fuchang,et al. The theory and design of the new microwave filter[M]. Beijing:Science Press, 2016.)

[11] SZYDLOWSKI Lukasz,LAMECKi Adam,MROZOWSKI Michal. Coupled-resonator filters with frequency-dependent couplings: coupling matrix synthesis[J]. IEEE Microwave and Wireless Components Letters, 2012,22(6):312–314.

[12] 理查德 J C,钱德拉 M K,拉费特 R M. 通信系统微波滤波器——基础、设计与应用[M]. 北京:电子工业出版社, 2012:129-135. (RICHARD J C,CHANDRA M K,RAAFAT R M. Microwave filters for communication systems fundamentals, design and applications[M]. Beijing:Electronic Industry Press, 2012:129-135.)

[13] SZYDLOWSKI Lukasz,LESZCZYNSKA Natalia,MROZOWSKI Michal. Generalized Chebyshev bandpass filters with frequency-dependent couplings based on stubs[J]. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, 2013,61(10): 3601-3612.

[14] HONG J S. Microstrip filters for RF/microwave applications[M]. Hoboken,New Jersey:John Wiley & Sons, Inc., 2011:198-201.

[15] 张翼飞,陈晓光,崔立成. 四阶双模介质滤波器的设计与分析[J]. 太赫兹科学与电子信息学报, 2009,7(3):187-191. (ZHANG Yifei,CHEN Xiaoguang,CUI Licheng. Structure design and analysis of a 4th-degree dielectric dual-mode filter[J]. Journal of Terahertz Science and Electronic Information Technology, 2009,7(3):187-191.)

作者简介:

方芝清(1985-)，男，重庆市人，在读硕士研究生，助理研究员，主要研究方向为系统级封装与无源集成.email:417385209@qq.com.

李智鹏(1985-)，男，成都市人，博士，高级工程师，主要研究方向为微波毫米波电路与 SiP 技术.

吕立明(1980-)，男，河北省肃宁县人，硕士，副研究员，主要研究方向为射频微波毫米波、SiP 技术、EMC 技术.

曾 荣(1985-)，男，四川省资中市人，硕士，高级工程师，主要研究方向为射频微波系统设计、SiP 技术.

唐高弟(1963-)，男，四川省三台县人，研究员，主要研究方向为微波毫米波电路和雷达系统.